Fallstudien für die aggregierte Analyse von agentenbasierten Modellen mithilfe von Markovketten

Florian Kitzler, Martin Bicher, Niki Popper, Felix Breitenecker

Übersicht

Mathematical Modelling and Simulation

- Motivation: Validierung Agentenbasierter Modelle
- Stochastische Agentenbasierte Modelle
- Markovketten zur Analyse von Agentenbasierten Modellen
- Ergebnisse

Validierung Agentenbasierter Modelle

Validierung:

1. Ist das Modell das richtige Modell um meine Frage zweckmäßig zu beantworten?

2. Kann man das ABM vielleicht auch einfacher auf makroskopischer Ebene beschreiben?

Stochastische Modelle

- Stochastische Modelle: Zufall beeinflusst Simulationsergebnisse z.B.
- Anfangsverteilung legt Position bzw. Parameter der Agenten zu Beginn fest
- Bewegung der Agenten zufällig (Random Walk)
- Zufall bei der Interaktion (Wahl des Interaktionspartners, Verhaltensänderung mit Wahrscheinlichkeit)

- Definition : Markovkette
- Analyse zu Zeitpunkt n
- Existenz von Grenzverteilungen
- Ersteintrittszeiten
- Vom ABM zur zeitdiskreten Markovkette
  (Opinion Dynamics Beispiel)

Definition: Zeitdiskrete Markovkette

Mathematical Modelling and Simulation

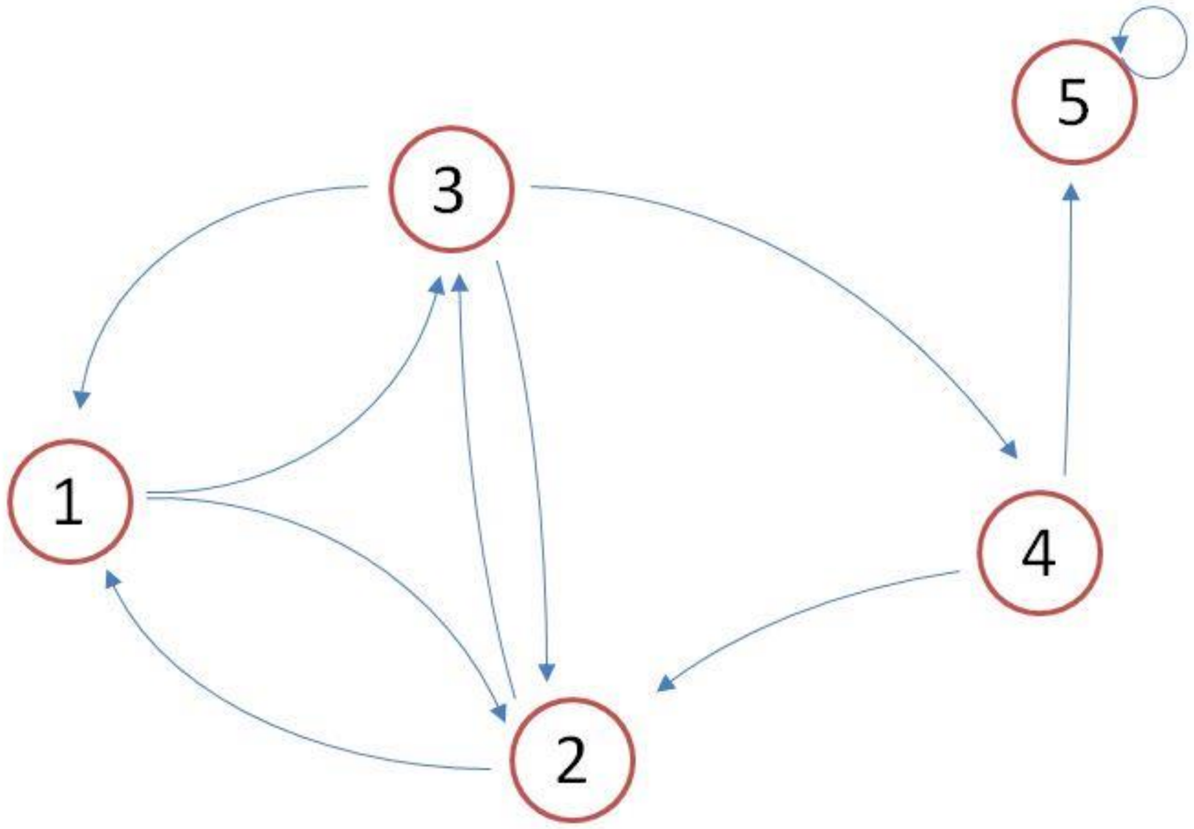
Definition *Sei* $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ *endlich,* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man nennt eine Folge von Zufallsvariablen* $X_0, X_1, \ldots$ *mit Werten in* S *eine stationäre Markovkette wenn*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, X_0 = k_0) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = j, X_0 = i) = p_{i,j}
\end{aligned}
$$

Dabei ist S *der Zustandsraum und die stochastische Matrix* $P = (p_{i,j})_{i,j=1}^m$ *die Übergangsmatrix*

Übergangsgraph

- Graphische Darstellung der Markovkette



Verteilung nach n Zeitschritten

Satz (Transient Distribution). *Sei P die Übergangsmatrix und* $\mu_0 = [\mathbb{P}(X_0 = 1), \mathbb{P}(X_0 = 2), \ldots, \mathbb{P}(X_0 = m)] \in \mathbb{R}^{1\times m}$ *die Verteilung der Zustände zum Zeitpunkt* $n = 0$. *So gilt mit* $\mu_n := [\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2), \ldots, \mathbb{P}(X_n = m)]$

$$\mu_n = \mu_0 P^n$$

Beispiel:
Opinion Dynamics Modell

Mathematical Modelling and Simulation

- Agenten haben Wert aus {0,1}, der Ablehnung oder Zustimmung angibt
- Bei Interaktion mit einem oder mehreren Agenten, ändert der Agent seine Meinung nach gewissen Regeln
- Beobachtet wird Verteilung der aggregierten Größe:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A_i \quad \in [0,1]$$

Beschreibung: ABM

- In jedem Zeitschritt wird zufällig ein Agent ausgewählt und ein weiterer Kontaktpartner
- Stimmen die Meinungen nicht überein, ändert der gewählte Agent seine Meinung mit Wahrscheinlichkeit 50%
- 2. Variante: Der ausgewählte Agent vergleicht seine Meinung mit allen anderen Agenten
- Ist mindestens die Hälfte anderer Meinung, schließt sich der Agent zu 50% der Mehrheit an

Beschreibung: Markovkette

- Zustandsraum: S = {0,1,2,…, N} mit 0 = [0,N], 1 = [1, N-1], … , N = [N,0]
- Bei N Agenten gibt es N+1 Zustände
- Sei j = [j, N-j] ein Zustand so gibt es folgende Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{j,j+1} = \frac{N-j}{N}\frac{j}{N-1}\frac{1}{2} = p_{j,j-1}$$

$$p_{j,j} = 1-(p_{j,j-1}+p_{j,j+1})$$

Übergangswahrscheinlichkeiten für 2. Variante

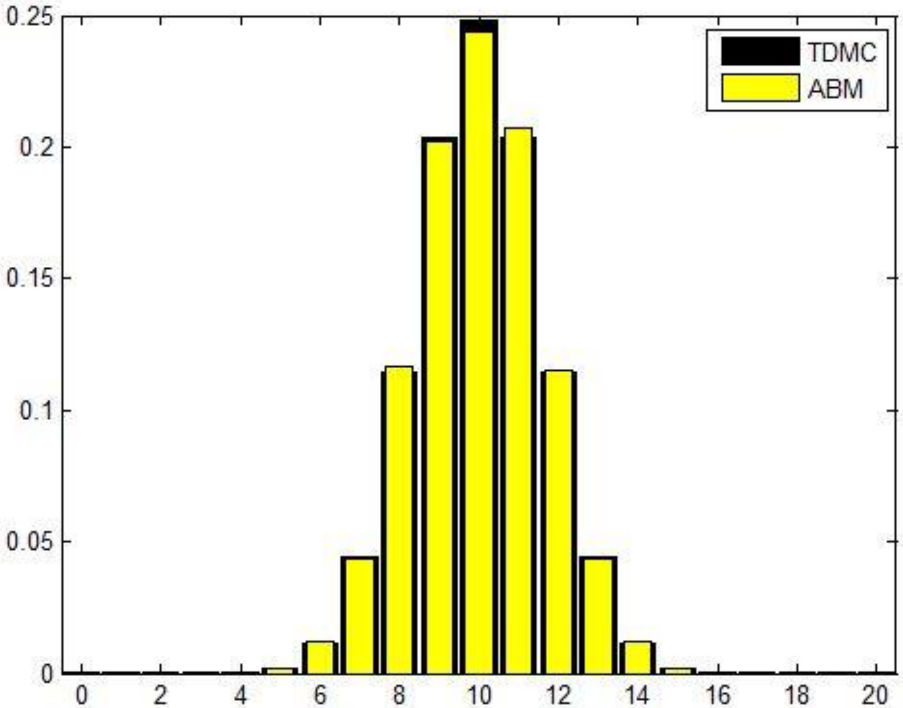
- Sei j = [j, N-j] ein Zustand so gibt es folgende Übergangswahrscheinlichkeiten:

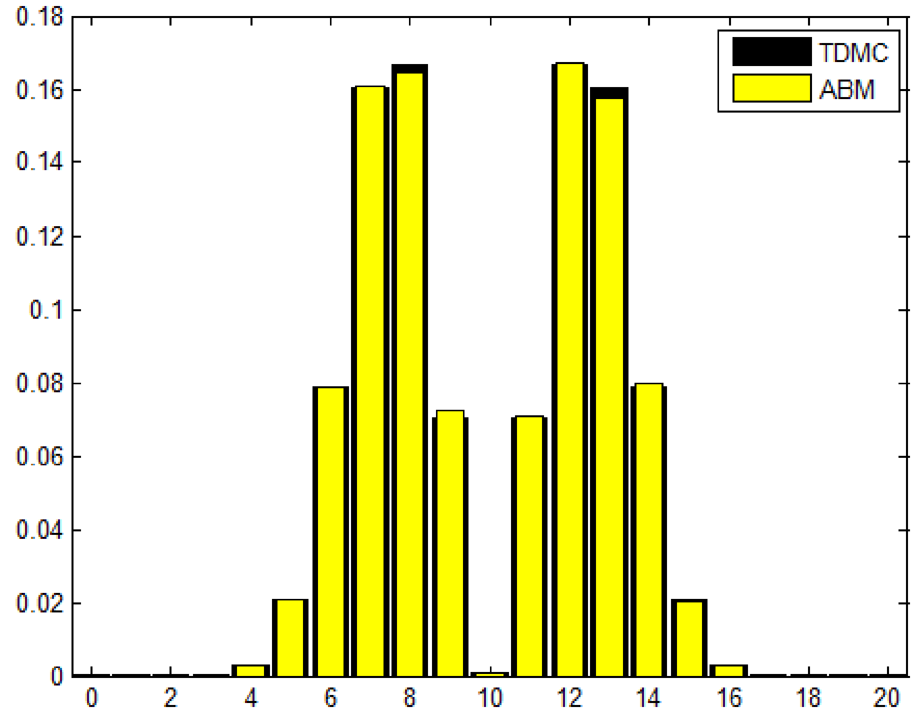
$$p_{j,j-1} = \frac{j}{N}\frac{1}{2}\,\chi_{\{\frac{N-j}{N-1}\geq 0.5\}}$$

$$p_{j,j+1} = \frac{N-j}{N}\frac{1}{2}\,\chi_{\{\frac{j}{N-1}\geq 0.5\}}$$

$$p_{j,j} = 1-(p_{j,j-1}+p_{j,j+1})$$

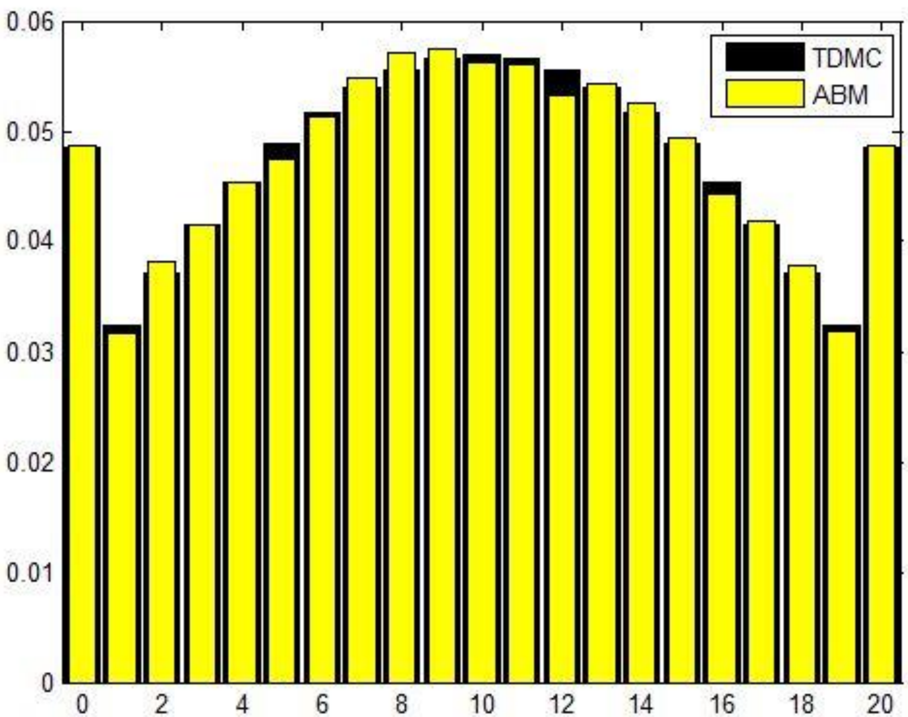
Ergebnisse:

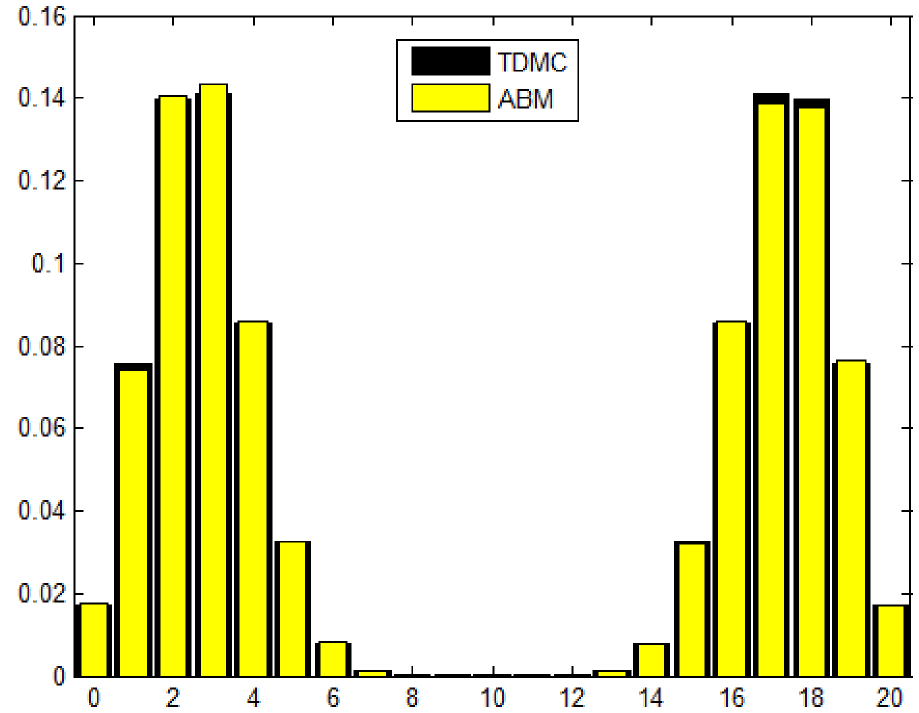




Endzeit: n = 10, 100.000 Durchläufe des ABM, 20 Agenten

Ergebnisse:





Endzeit: n = 50, 100.000 Durchläufe des ABM, 20 Agenten

Vorteile:

1. Kürzere Simulationsdauer
2. Analysemöglichkeiten für Grenzverteilung/ Ersteintrittszeiten
3. Analyse des Übergangsgraphen ohne Kenntnis der genauen Werte

Nachteile:

1. Aufstellen des Zustandsraumes bei großen Modellen schwierig
2. Bei heterogenen Agenten wird der Zustandsraum sehr komplex
3. Markoveigenschaft nur gegeben wenn Agenten kein „Gedächtnis“ haben

Fragen?

Danke für die Aufmerksamkeit!