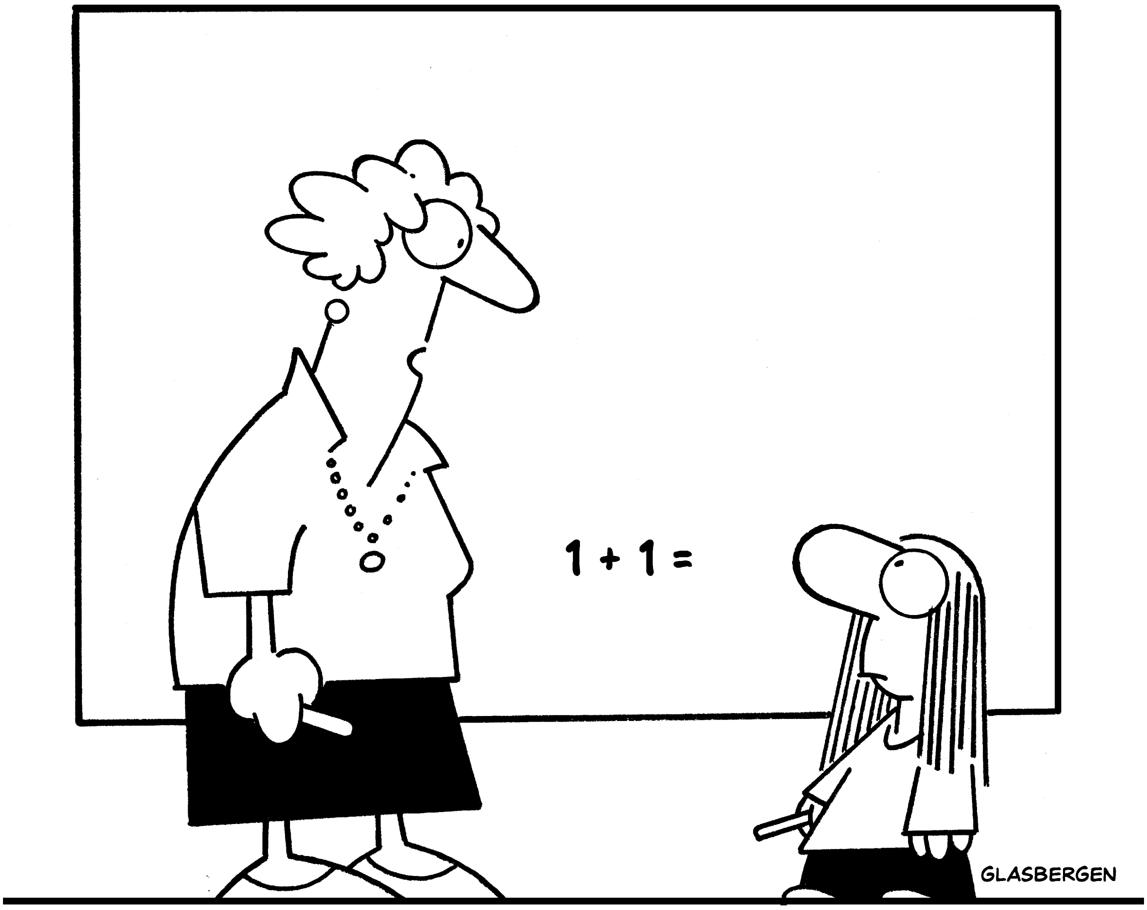
Vorkurs Mathematik



“Yes, this will be useful to you later in life.”

Vorwort

Liebe Studienanfängerinnen und Studienanfänger,

das vorliegende Skript wurde ursprünglich in wesentlichen Teilen von Johanna Minisini für die Mathematik-Teile der Studienvorbereitungskurse an der Technischen Hochschule Ulm erstellt und basiert auf vielen Einzelskripten, die über viele Jahre für die Vorkurse erstellt wurden. Ich bedanke mich herzlichst bei allen Autor*innen (insbesondere bei Johanna) für die überlassenen Aufgaben und Anregungen.

Wir möchten Ihnen damit helfen, Lücken zu schließen und verschüttetes Wissen wieder auszugraben und aufzufrischen. Sie sollten Ihren Zeitaufwand für einzelne Kapitel nach Ihrem Bedarf bemessen. Unterschätzen Sie die Grundlagen nicht, hier liegen die meisten Fallstricke. Zu jedem Theorie-Teil finden Sie einen passenden Aufgaben-Teil. Grundsätzlich wurden nicht bei allen Aufgaben Lösungswege angegeben, denn es gibt oft nicht den einen Königsweg, der zu einer Lösung führt. Außerdem ist es für das Verstehen und das Aufdecken von Denkfehlern hilfreich, sich auf die Suche nach den Fehlern im eigenen Rechenweg zu machen.

Die verlinkten Videos stammen von der Initiative ***Mathematik macht Freu(n)de*** der Universität Wien von Univ.-Prof. Michael Eichmair, PhD und aus der ***Videosammlung*** von Prof. Dr. Jörn Loviscach, der an der FH Bielefeld lehrt. Ich danke beiden Kollegen für Ihre großartige Arbeit und dafür, dass sie diese öffentlich zur Verfügung stellen. Mein besonderer Dank gilt den vielen Videoersteller*innen der Uni Wien für Ihre tolle Arbeit. Unter beiden Adressen finden Sie viel weitere wertvolle Lehrvideos.

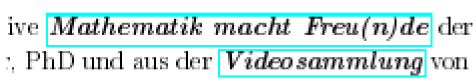
Ergänzend können Sie die passenden *Kompetenzhefte (KH)* und *Arbeitsblätter (AB)* der Initiative *Mathematik macht Freu(n)de* nutzen. Diese Materialien sind hervorragend zum Selbststudium geeignet. Die Videos sind so konzipiert, dass Sie sie mit dem ausgedruckten Arbeitsblatt durcharbeiten sollten. Die *Ausarbeitung* stellt jeweils die Lösung dar.

Sollten Sie Fehler im Skript entdecken, freue ich mich, wenn Sie mir diese per Email mitteilen. (thorsten.titzmann@thu.de)

Ich wünsche Ihnen viel Freude und Erfolg in Ihrem Vorkurs!

Thorsten Titzmann

Benutzungshinweise: Sollten Sie eine Darstellung der Links mit farblicher Umrandung



wünschen, so öffnen Sie dieses Dokument mit einem PDF-Viewer (z.B. Adobe Acrobat) oder mit dem Browser Firefox. Die Browser Chrome und Edge unterstützen die farblichen Rahmen nicht, eventuell ist Ihnen dies auch lieber. Alle Links sind fett formatiert. Sie können im Browser festlegen, ob die Links in einem neuen Tab geöffnet werden sollen.

Dieses Skript wurde zuletzt am 21. Februar 2022 überarbeitet.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Beutelspacher(2016)] A. Beutelspacher. *Mathe-Basics zum Studienbeginn: Survival-Kit Mathematik*. Springer, 2016.

[Dürrschnabel et al.(2019)Dürrschnabel, Dürr, Erben, Gercken, Lunde, Wurth, and Zimmermann] K. Dürrschnabel, R. Dürr, W. Erben, M. Gercken, K. Lunde, R. Wurth, and M. Zimmermann. *So viel Mathe muss sein! - Gut vorbereitet in ein WiMINT-Studium*. Springer Spektrum, 2019.

[Hoever(2014)] G. Hoever. *Vorkurs Mathematik: Theorie und Aufgaben mit vollständig durchgerechneten Lösungen*. Springer, 2014.

[Kemnitz(2014)] A. Kemnitz. *Mathematik zum Studienbeginn*. Springer, 2014.

[Modler and Kreh(2014)] F. Modler and M. Kreh. *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*. Springer, 2014.

[Walz et al.(2014)Walz, Zeilfelder, and Rießinger] G. Walz, F. Zeilfelder, and Th. Rießinger. *Brückenkurs mathematik*. Springer, 2014.

[Wellstein and Kirsche(2009)] H. Wellstein and P. Kirsche. *Elementargeometrie*. Vieweg, 2009.

Teil I.

Theorie

1. Grundlagen

Dieses Kapitel soll Ihnen helfen, Lücken bei grundlegenden Rechenoperationen und mathematischen Prinzipien zu schließen. Für Ihr Studium gehören diese Grundlagen zum Handwerkszeug, das Sie in technischen und naturwissenschaftlichen Fächern zwingend beherrschen müssen. Die Teile dieses Kapitels, die nicht im Vorkurs behandelt werden, sollten Sie sich im Selbststudium aneignen, soweit Sie sie nicht (sicher) beherrschen.

1.1. Rechnen

Als Akademiker mit einem technischen Hintergrund müssen Sie über ein sehr gutes Zahlenverständnis verfügen. Dieses Verständnis ist insbesondere wichtig, da Sie eigene und fremde Ergebnisse intuitiv auf Plausibilität überprüfen können müssen. Gerade, wenn Sie beruflich fast nur mit maschineller Unterstützung rechnen, sind diese Fähigkeiten essentiell. Um ein gutes Zahlenverständnis und Einschätzungsvermögen zu entwickeln, ist Kopfrechnen (auch mit schriftlicher Unterstützung), der erste Schritt. Das Rechnen ohne Taschenrechner hilft Ihnen zudem mathematische Grundbegriffe richtig zu verstehen, etwaige falsche Vorstellungen abzubauen und einen sicheren Umgang mit Term-Umformungen (insbesondere Bruch-, Wurzel- und Potenzrechnung, Auflösen von Gleichungen) zu erlangen. Letztere sind wiederum die Basis für die Mathematik und allen Anwendungen die darauf aufbauen (z.B. Wirtschaftslehre, Physik, Informatik, technische Mechanik, quantitative Methoden etc.). Sollten Sie feststellen, dass Ihre Rechenkompetenzen eingerostet sind, so können Sie diese durch einfaches Üben wiedererlangen. Es wird Ihnen mit dem Übungsfortschritt zunehmend leichter fallen, eigenständig zu rechnen.

Zum Start empfiehlt sich das Rechentraining (**5.1**) in den Grundlagenaufgaben.

Schriftliche Division

Die Rechentechnik des schriftlichen Dividierens benötigen Sie auch bei der Polynomdivision, die weiter hinten im Skript beschrieben wird. Doch zunächst ein

Beispiel:

- $2346 : 3 = 782$
  Die zugehörige Rechnung sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2 & 3 & 4 & 6 & 3 \\ \cline{6-6}
- & \underline{2} & \underline{1} & & & 7\ 8\ 2 \\
 & & 2 & 4 & & \\
 & - & \underline{2} & \underline{4} & & \\
 & & & 0 & 6 & \\
 & & & - & \underline{6} & \\
 & & & 0 & 0 &
\end{array}$$

  Das Prinzip dieser Rechnung verläuft nach der folgenden Vorgehensweise:

- Um Zahlen zu dividieren, schreibt man sie nebeneinander mit dem Divisionszeichen dazwischen.
  - Man dividiert die erste Ziffer der linken Zahl durch die rechte Zahl. Geht das nicht, nimmt man links die zweite Ziffer dazu, hier also 23.

  - Nun multipliziert man das Ergebnis mit der rechten Zahl, schreibt das Produkt unter die verwendeten Ziffern der linken Zahl und bildet die Differenz.
    Achtung: Auf richtige Position der Zahlen achten.
  - Dann zieht man die nächste Ziffer der linken Zahl nach unten und rechnet erneut.
  - So geht man vor, bis man alle Stellen der linken Zahl verwendet hat.
    Ist die letzte Differenz Null, so ist die Rechnung beendet.

- Ergibt sich beim letzten Rechenschritt eine Differenz und die linke Zahl hat keine Ziffer mehr, so ergänzt man sie mit einer Null und setzt in der Ergebniszahl ein Komma. Nun berechnet man die nächste Ergebnisziffer. Oder man notiert die Differenz als Rest.

$$134 : 4 = 33 \text{ R2 } = 33{,}5$$

  Die zugehörige Rechnung ist hier:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 1 & 3 & 4 & & 4 \\ \cline{6-6}
- & 1 & 2 & & & 3\,3{,}5 \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 4 & & \\
 & - & 1 & 2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & 0 & \\
 & & - & 2 & 0 & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & 0 &
\end{array}$$

- Bei einigen Divisionen ergeben sich nach ein paar Schritten wieder dieselben Reste, man spricht von einer Periode.

$$2 : 7 = 0,\overline{285714}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 2 & & & & & & & 7 \\ \cline{9-9}
- & 0 & & & & & & & 0{,}2\,8\,5\,7\,1\,4 \\ \cline{2-2}
 & 2 & 0 & & & & & & \\
- & 1 & 4 & & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 6 & 0 & & & & & \\
 & - & 5 & 6 & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 4 & 0 & & & & \\
 & & - & 3 & 5 & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 5 & 0 & & & \\
 & & & - & 4 & 9 & & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & - & & 7 & & \\ \cline{6-7}
 & & & & & & 3 & 0 & \\
 & & & & & - & 2 & 8 & \\ \cline{7-8}
 & & & & & & & 2 &
\end{array}$$

Lernvideos

Division von Dezimalzahlen

Bemerkung: Die Links auf die Videos von *Mathematik macht Freu(n)de* haben als Ziel in den meisten Fällen eine Auflistung von mehreren Videos (hier sind es 3).

Kopfrechnen

Beim Kopfrechnen muss Ihr Gehirn typischerweise zwei Leistungen erbringen:

Rechnen und **Merken**

Falls Sie ungeübt sind, entlasten Sie Ihr Gehirn indem Sie die Leistung Merken erst mit dem Übungsfortschritt abfordern: Machen Sie sich zu Beginn Ihres Rechentrainings schriftliche Notizen (Zwischenergebnisse etc.). Sie werden feststellen, dass Sie nach kurzer Zeit auf die Merkhilfen verzichten und flüssig rechnen können.

Beispiele:

1. Sie wollen 23^2 ausrechnen. Es gibt verschiedene Ansätze die Sie verfolgen können. Diese laufen alle auf einzelne Multiplikationen und nachfolgende Addition der Teilergebnisse hinaus. In der ersten Übungsphase notieren Sie sich die Teilergebnisse und addieren diese am Ende. Später stellen Sie sicher, dass Sie für derartige Rechnungen kein Papier mehr benötigen.

   - Ansatz 1: $20 \cdot 23 = 460$ und $3 \cdot 20 = 60$ und $3 \cdot 3 = 9$ führt auf
   $$23^2 = 460 + 60 + 9 = 529$$
   - Ansatz 2: Mit der ersten binomischen Formel lassen sich leicht Quadratzahlen ausrechnen: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ führt auf
   $$23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$$

2. Sie wollen die Dezimaldarstellung von $\frac{7}{3}$ berechnen. Das funktioniert im Kopf genauso wie bei der schriftlichen Division, nur dass man sich die Zwischenergebnisse merken muss. Tipp: Notieren Sie anfänglich das Endergebnis sukzessive während Sie es berechnen:
   $$\frac{7}{3} = 2 + Rest$$
   Sie notieren die 2 und merken sich den Rest 1
   $$\frac{10}{3} = 3 + Rest$$
   Sie notieren die 3: 2,3 Der Rest ist nun wieder 1 und damit ist klar, dass Sie nur noch den Periodenstrich über die 3 setzen müssen:
   $$\frac{7}{3} = 2,\overline{3}$$

3. Später versuchen Sie auf das Schreiben zu verzichten: Sie wollen die Dezimaldarstellung von $\frac{11}{7}$ berechnen:
   $$\frac{11}{7} = 1 + Rest$$
   Sie merken sich 1 und den Rest 4.
   $\frac{40}{7} = 5+$ Rest, Sie merken sich 1,5 und Rest 5.
   $\frac{50}{7} = 7+$ Rest, Sie merken sich 1,57 und Rest 1.
   $\frac{10}{7} = 1+$ Rest, Sie merken sich 1,571 und Rest 3.
   $\frac{30}{7} = 4+$ Rest, Sie merken sich 1,5714 und Rest 2.
   $\frac{20}{7} = 2+$ Rest, Sie merken sich 1,57142 und Rest 6.

$\frac{60}{7} = 8+$ Rest, Sie merken sich 1,571428 und Rest 4.

Da $\frac{40}{7}$ wieder 5 plus Rest ist, wissen Sie nun, dass Sie die Periode 571428 haben.

$$\frac{11}{7} = 1,\overline{571428}$$

Tipp: Wenn eine Division durch 7 nicht ohne Rest möglich ist, entsteht immer eine Periode 14 28 57. Diese lässt sich leicht merken, da 14 das Doppelte von 7 ist, $28 = 2 \cdot 14$ und $57 = 2 \cdot 28 + 1$

4. Wenn Sie Brüche berechnen, kürzen Sie zunächst, um die Multiplikationen und Divisionen möglichst einfach zu halten. Auch hierbei müssen Sie sich die Zwischenergebnisse des Kürzens merken.
$$\frac{3}{7} \cdot \frac{56}{6}$$
Es wird 3 mit 6 und 56 mit 7 gekürzt. Damit bleibt $\frac{1}{1} \cdot \frac{8}{2} = 4$.
Im Kopf kürzen Sie immer nur ein Paar Zahlen und merken sich das neue Zwischenergebnis. Dann kürzen Sie wieder und fahren so fort:
$$\frac{3}{7} \cdot \frac{56}{6} = \frac{56}{7 \cdot 2} = \frac{8}{2} = 4$$

5. Sie wollen 6,3% von 120 000 ausrechnen: Kürzen Sie zunächst $1\% = \frac{1}{100}$ mit 120 000: Es verbleibt $6{,}3 \cdot 1200$ Sie wissen sofort: $6 \cdot 1200 = 7200$ und $0{,}3 \cdot 1200$ ist dann die Hälfte eines Zehntels des letzten Teilergebnisses:$0{,}3 \cdot 1200 = \frac{720}{2} = 360$ Die Lösung ist also
$$6{,}3\% \cdot 120\,000 = 7200 + 360 = 7560$$

1.2. Rechenoperationen und Umformung von Termen

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Kommutativgesetze
$$a + b = b + a; \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

2. Assoziativgesetze
$$(a + b) + c = a + (b + c); \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. Distributivgesetz **Merke: Punkt vor Strich**
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

4. Umgang mit dem negativen Vorzeichen
$$(-a)b = -ab = a(-b); \quad (-a)(-b) = ab; \quad -(-a) = a; \quad a - (b + c) = a - b - c$$

Multiplikation von Summen und Ausklammern

Zwei Summen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der ersten Summe mit jedem Glied der zweiten Summe unter Beachtung des Vorzeichens multipliziert.

- $(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$
- $(a+b) \cdot (c-d) = ac - ad + bc - bd$
- $(a-b) \cdot (c-d) = ac - ad - bc + bd$
- $(a+b+c) \cdot (2x-y-z) = 2ax - ay - az + 2bx - by - bz + 2cx - cy - cz$

Haben alle Glieder einer Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann man diesen ausklammern, wodurch die Summe in ein Produkt umgewandelt wird.

- $ax + bx + cx = x \cdot (a+b+c)$
- $a \cdot (x+1) + b \cdot (x+1) = (a+b) \cdot (x+1)$
- $2ab - a - 4ac = -a \cdot (-2b + 1 + 4c)$
- $2ax + 2ay + 3bx + 3by = 2a \cdot (x+y) + 3b \cdot (x+y) = (2a+3b) \cdot (x+y)$

Binomische Formeln

1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Lernvideos

Ausmultiplizieren, Klammern, Rechnen mit Buchstaben Binomische Formeln
Pascalsches Dreieck und Binome Binomische Formeln geometrisch
Dritte binomische Formel

Zu den Übungen: 5.2

1.3. Bruchrechnung

In Brüchen können folgende Rechenoperationen durchgeführt werden, die den Wert des Bruches nicht verändern:

1. Kürzen: Zähler und Nenner werden durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) geteilt.
2. Erweitern: Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl ($\neq 0$) multipliziert.

Wichtig: Es muss der gesamte Zähler bzw. Nenner geteilt / multipliziert werden.

Beispiele:

- $\frac{a}{a} = 1,\ \frac{0}{a} = 0,\ a \neq 0$
- $\frac{abxy}{ab} = xy \qquad a, b \neq 0$
- $\frac{ab+ac}{a} = \frac{a \cdot (b+c)}{a} = b + c \qquad a \neq 0$
- $\frac{ax - bx + ay - by}{a-b} = \frac{x \cdot (a-b) + y \cdot (a-b)}{a-b} = \frac{(x+y) \cdot (a-b)}{a-b} = x + y$

Lernvideos

Bruchteile Brüche Kürzen und Erweitern Erweitern Kürzen

Addition und Subtraktion

Brüche mit demselben Nenner werden auch **gleichnamig** genannt. Haben Brüche unterschiedliche Nenner, werden sie entsprechend **ungleichnamig** genannt. Gleichnamige Brüche werden addiert / subtrahiert, indem man die Zähler addiert / subtrahiert und den Nenner beibehält.

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{d} \qquad d \neq 0$$

Ungleichnamige Brüche sind vor dem Addieren / Subtrahieren durch Erweiterung gleichnamig zu machen.

Ein gemeinsamer Nenner lässt sich im Zweifel immer durch das Produkt der einzelnen Nenner finden!

Beispiele:

1. $\frac{5a}{2x} + \frac{3a}{8x} = \frac{20a}{8x} + \frac{3a}{8x} = \frac{20a+3a}{8x} = \frac{23a}{8x}$
2. $\frac{7a}{12b} - \frac{3a}{5c} = \frac{7a \cdot 5c}{12b \cdot 5c} - \frac{3a \cdot 12b}{5c \cdot 12b} = \frac{35ac - 36ab}{60bc}$

Lernvideos

Addition

Multiplikation und Division

Zwei Brüche werden multipliziert, indem man die Zähler und die Nenner jeweils miteinander multipliziert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad b, d \neq 0$$

Zwei Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad b, c, d \neq 0$$

Lernvideos

Multiplikation und Doppelbrüche Hauptnenner

Zu den Übungen: 5.3

1.4. Potenz- und Wurzelrechnung, Logarithmen

Das Rechnen mit Potenzen erlaubt es, die Operationen Multipliaktion und Division in Addition und Subtraktion zu überführen. Dies ist eine deutliche Vereinfachung und findet ständig Anwendung beim Rechnen. Viele Operationen sind mit Potenzen (statt Brüchen oder Wurzeln) deutlich leichter.

- $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}} = a^n \qquad a = \text{Basis}, \ n = \text{Exponent}$

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{wenn n gerade ist} \\ -a^n & \text{wenn n ungerade ist} \end{cases}$

Lernvideos

Potenzen und Wurzeln

Addition und Subtraktion

Es können nur Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten addiert beziehungsweise subtrahiert werden.

Beispiele:

- $3x^3 - 5x^3 + 4x^3 = 2x^3$
- $6a^2b^3 + 4a^2 - 2b^3 + 7a^2 = 6a^2b^3 + 11a^2 - 2b^3$

Multiplikation und Division

Rechenregel	**Beispiel**
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$4x^3y^7 \cdot 5x^4y^2 = 20x^{3+4}y^{7+2} = 20x^7y^9$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$x^{5y} \cdot (5z)^{5y} = (5xz)^{5y} = 3125^y\,(xz)^{5y}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{12x^3y^4}{3x^2y^2} = 4x^{3-2}y^{4-2} = 4xy^2$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{2x}{y}\right)^{4z} = \dfrac{(2x)^{4z}}{y^{4z}}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$3x^{-2}y^3 = \frac{3y^3}{x^2}$
$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$	$(a^5)^{2x} = a^{10x}$
Speziell gilt:	$b^0 = 1$ und $b^{-r} = \dfrac{1}{b^r}$

Lernvideos

Ganzzahlige positive Exponenten Rechnen mit Exponenten Hoch Null
Negative Exponenten Exponentialdarstellung von Dezimalzahlen

Wurzeln

Zusätzlich wird das **Wurzelzeichen** definiert:

$$x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x^n = a \quad (a \geqslant 0)$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Damit ist die Potenzrechnung auch für rationale Exponenten erklärt.

Lernvideos

Gebrochenzahlige Potenzen Wurzeln Rechenregeln

Logarithmen

Steht eine Variable im Exponent, so spricht man von einer Exponentialgleichung, zum Beispiel:
$4^{2x} = 256$
Gleichungen des folgenden Typs werden mit Hilfe des Logarithmus gelöst.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$
$$2^x = 512 \Leftrightarrow x = \log_2 512 = 9$$
$$5^x = \frac{1}{125} \Leftrightarrow x = \log_5 \frac{1}{125} = -3$$

Der Logarithmus zur Basis 10 wird auch **dekadischer Logarithmus** genannt und durch das Symbol lg bezeichnet:

$$\log_{10} a = \lg a$$

Der Logarithmus zur Basis e wird auch **natürlicher Logarithmus** genannt und durch das Symbol ln bezeichnet, wobei $e \approx 2{,}72$ die Eulersche Zahl ist. Er wird häufig in Naturwissenschaft und Technik benutzt.

$$\log_e a = \ln a$$

Dabei lässt sich jeder beliebige Logarithmus $\log_a b$ durch den natürlichen Logarithmus ln darstellen:

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Beispiele:

- $\log_2 8 = 3;\qquad \log_2 1024 = 10;\qquad \log_{10} 100 = 2;\qquad \log_{10} \frac{1}{100} = -2$

Rechenregeln

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
- $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$
- $\log_a u^v = v \cdot \log_a u$

Lernvideos

Logarithmen Potenzfunktionen Logarithmen Rechenregeln für Logarithmen Logarithmen zu anderen Basen Exponentialfunktionen

Zu den Übungen: 5.4

1.5. Zahlen und Mengen

Georg Cantor (3.3.1845 - 6.1.1918), gab 1895 folgende Definition einer Menge:

Definition 1.1:
"Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl-unterschiedenen Objekten m [...] zu einem Ganzen."

Diese Definition fordert zum Einen, dass alle Objekte (auch **Elemente**) einer Menge eindeutig definiert sind, sie alle unterscheidbar sind und insbesondere kein Element doppelt enthalten ist. Die Elemente einer Menge müssen keine Zahlen sein.

Beispiele:

- Die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 5: $M = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$
- Die Menge mit dem einzigen Element 3: $M = \{3\}$
- Die leere Menge hat keine Elemente: $M = \{\} = \emptyset$
- Ein senkrechter Strich (oder ein Doppelpunkt) trennt Nebenbedingungen von der Bezeichnung der Elemente:

$$M = \{x|\, x\,\text{ist eine Quadratzahl} < 30\} = \{1{,}4{,}9{,}16{,}25\}$$

- Sind Bedingungen nicht erfüllbar, kann dies auf leere Mengen führen:

$$M = \{x|\, x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 + 1 = 0\} = \{\}$$

Notationen mit Mengen

1. $x \in M$ heißt: x ist ein Element von M
2. $x \notin M$ heißt: x ist kein Element von M
3. $M_1 = M_2$ bedeutet: Die Menge M_1 ist identisch mit der Menge M_2: $x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2$ und $x \notin M_1 \Leftrightarrow x \notin M_2$
4. $M_1 \subset M_2$ oder $M_1 \subseteq M_2$ bedeutet: Die Menge M_1 ist eine Teilmenge der Menge M_2: $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$ und $x \notin M_2 \Rightarrow x \notin M_1$
5. $A = M_1 \cup M_2$ ist die Vereinigung der Menge M_1 mit der Menge M_2. A enthält alle Elemente, die in M_1 ODER ($\vee$) M_2 enthalten sind.
6. $A = M_1 \cap M_2$ ist die Schnittmenge der Mengen M_1 und M_2. A enthält alle Elemente, die in M_1 UND ($\wedge$) M_2 enthalten sind.
7. $A = M_1 \backslash M_2 = \{x|x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$ ist die Differenzmenge: M_1 reduziert um M_2. A enthält alle Elemente, die in M_1 UND NICHT in M_2 enthalten sind. Achtung: $M_1 \backslash M_2 \neq M_2 \backslash M_1$
8. $A = M_1 \times M_2 = \{(x, y)|x \in M_1,\, y \in M_2\}$ ist das kartesische Produkt der Mengen M_1 und M_2.

Beispiele:

- $2 \in \{1{,}2{,}3\}$, $4 \notin \{1{,}2{,}3\}$
- Es seien $M_1 = \{1{,}2{,}3{,}4\}$, $M_2 = \{4{,}5{,}6{,}7\}$, $M_3 = \{4{,}5\}$, dann gilt:
  - $M_3 \subset M_2$
  - $M_1 \cap M_2 = \{4\}$
  - $M_2 \backslash M_1 = \{5{,}6{,}7\}$
- $x \in M \backslash \{0\}$ wird gelesen: "‘x ist ein Element aus M ohne 0"’

Die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$

Die Menge der **natürlichen Zahlen** ist:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4....\}$$

Die Menge aller geraden natürlichen Zahlen kann man zum Beispiel so beschreiben:

$$M = \{2x | \, x \in \mathbb{N}\} = \{2,4,6\ldots\}$$

$\mathbb{N}_0$ bezeichnet die (Menge der) natürlichen Zahlen vereinigt mit der Null:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Die Erweiterung der Zahlenbereiche war meist durch die Unlösbarkeit gewisser Gleichungen motiviert. Ausgehend von $\mathbb{N}$ lassen sich so mehrere Erweiterungen motivieren. Die Menge der **ganzen Zahlen** ist:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3....\}$$

Beispiele:

- $2x = 16$ hat genau eine Lösung in $\mathbb{N}$
- $-2x = 6$ hat keine Lösung in $\mathbb{N}$, aber genau eine Lösung in $\mathbb{Z}$
- $0 \cdot x = 0$, hat unendlich viele Lösungen in $\mathbb{Z}$
- $3x = 1$ ist nicht lösbar in $\mathbb{Z}$

Die Menge $\mathbb{Q}$

Ist eine Gleichung in A lösbar, so ist sie auch in B lösbar, wenn $A \subset B$ gilt. Um Gleichung wie $3x = 1$ lösen zu können, ist eine Erweiterung auf die Menge der **rationalen Zahlen** erforderlich:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | \, m \in \mathbb{Z}, \, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Satz 1.1. *Jede rationale Zahl ist eine periodische oder abbrechende Dezimalzahl. Und jede periodische oder abbrechende Dezimalzahl ist rational.*

Beispiele:

- $r \cdot x = s$, besitzt für $r \neq 0$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{Q}$ für feste $r, s \in \mathbb{Q}$
- $x \cdot x = 2$, besitzt keine Lösung in $\mathbb{Q}$
- $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$ (Bemerkungen: Die Anzahl der Reste der Division $\frac{m}{n}$ ist $\leqslant n - 1$.)
- $x = 2{,}12\overline{345}$
  $100x = 212,\overline{345}$ und $100\,000x = 212\,345,\overline{345}$
  $99\,900x = 212\,133 \Rightarrow x = \dfrac{212133}{99900}$

Die Menge $\mathbb{R}$

Die Zahl 0,1 10 100 1000 10000 100000..... kann nicht in $\mathbb{Q}$ sein, da sie weder periodisch noch abbrechend ist. Neben der hier konstruierten Zahl, kennen wir viele weitere Zahlen, die nicht in $\mathbb{Q}$ sein können. Eine dieser Zahlen ist $x = \sqrt{2}$. Die zugehörige Gleichung $x^2 = 2$ besitzt keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

Eine Möglichkeit, die Menge der **reellen Zahlen** zu definieren, ist: $\mathbb{R} = \{x | x \,\text{ist Dezimalzahl}\}$

Jeder Punkt der Zahlengeraden (Zahlenstrahl) ist in $\mathbb{R}$ enthalten.

Intervallschreibweisen und Ungleichungen

Mit $a \leqslant b$ gelten folgende Notationen:

$$[a, b] := \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$$
$$(a, b) := \{x | a < x < b\}$$

$$(a, b] := \{x | a < x \leqslant b\}$$
$$[a, \infty) := \{x | a \leqslant x\}$$
$$(-\infty, b) := \{x | x < b\}$$

Die runden Klammern können auch durch nach außen offene eckige Klammer ersetzt werden:

$$(a, b) =]a, b[\,,\ [a, b) = [a, b[\,\text{etc.}$$

Teilstücke der Zahlengeraden werden durch Intervalle oder Ungleichungen beschrieben: Die Menge aller positiven reellen Zahlen entspricht der rechte Halbgeraden der Zahlengeraden. Diese Teilmenge der Menge $\mathbb{R}$ kann durch eine Ungleichung oder ein Intervall beschrieben werden:

$$[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x\}$$

Bemerkungen:

- Ein Intervall kann auch nur einen einzigen Punkt enthalten: $[a, a] = a$
- Nichtleere Schnittmengen von Intervallen sind wieder Intervalle.
- Die Lösungsmengen von Ungleichungen sind Intervalle oder Vereingungen von Intervallen.

Werden zwei Terme mit einem Ungleichheitszeichen verbunden, so spricht man von einer **Ungleichung**. Hierbei können zur Lösung dieselben Umformungen vorgenommen werden, wie bei Gleichungen (Lernvideo: **Auflösen**). Bei der Multiplikation oder Division mit einem Faktor $c < 0$, $c \in \mathbb{R}$ dreht sich das Ungleichheitszeichen um. Das heißt es gelten folgende Äquivalenzumformungen.

1. Addition oder Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung.
2. Multiplikation oder Division beider Seiten der Gleichung mit einem Faktor $c \neq 0$.
   a) $c > 0$: das Ungleichheitszeichen bleibt erhalten.
   b) $c < 0$: das Ungleichheitszeichen wird umgedreht.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} & -7x & \leqslant & 4x + 18 \\ \Leftrightarrow & -11x & \leqslant & 18 \\ \Leftrightarrow & x & \geqslant & -\frac{18}{11} \\ \Leftrightarrow & L & = & \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{18}{11}\right\} \\ \Leftrightarrow & L & = & \left[-\frac{18}{11}, \infty\right) \end{array}$$

Lernvideos

Zahlenbereiche Mengenbildung durch Auswahl Intervalle

Zu den Übungen: 5.5

1.6. Größen und Einheiten

Das Messen ist eine der wichtigsten Aufgaben in der Physik und Technik. Neben den erforderlichen Messgeräten werden dafür genormte Einheiten benötigt, die in einem System zusammengefasst sind. Heute wird ausschließlich das „Internationale Einheitensystem (SI-Einheiten)“ verwendet. Die nachfolgende Tabelle zeigt die 7 Basiseinheiten:

Größe	**Einheit**	**Symbol**
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg
elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Die weiteren SI- Einheiten werden als Potenzprodukte aus den Basiseinheiten kohärent, also ohne Verwendung von Zahlenfaktoren, abgeleitet. Alle anderen Einheiten sind inkohärent und somit keine SI-Einheiten.

Beispiele:

1. Watt [W] ist eine kohärente Leistungseinheit, also ohne Zahlenfaktor abgeleitet:

$$1\mathrm{W} = 1\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$$

2. Kilowatt [kW] ist eine inkohärente Leistungseinheit, also mit Hilfe eines Zahlenfaktors abgeleitet:

$$1\mathrm{kW} = 10^3\cdot\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$$

Die nachfolgende Tabelle zeigt, welcher Faktor in Bezug auf eine Grundeinheit bei den entsprechenden Vorsilben gebraucht wird.

Vorsilbe	**Symbol**	**Faktor**	**Vorsilbe**	**Symbol**	**Faktor**
Tera	T	10^{12}	Dezi	d	10^{-1}
Giga	G	10^9	Zenti	c	10^{-2}
Mega	M	10^6	Milli	m	10^{-3}
Kilo	k	10^3	Mikro	μ	10^{-6}
Hekto	h	10^2	Nano	n	10^{-9}
Deka	da	10			

So ist beispielsweise ein Milliampere mA ein Tausendstel Ampere, das heißt $1\mathrm{mA} = 1\cdot 10^{-3}\mathrm{A}$.

Lernvideos

Proportionalität und Einheiten

Zu den Übungen: 5.6

1.7. Dreisatz

Dieses Lösungsverfahren benutzt man, wenn verschiedene Größen einem proportionalen Verhältnis zueinander stehen.

Beispiel:

Ein Auto braucht für eine Strecke von 100 km 6,8 ℓ Kraftstoff. Wie viel verbraucht dieses Auto für eine Strecke von 35 km?

Zunächst berechnen wir den Verbrauch für einen Kilometer:

$$6{,}8\ \ell : 100\ \text{km} = 0{,}068\ \ell/\text{km}$$

Damit können wir den Verbrauch für 35 km Strecke berechnen:

$$0{,}068\ \ell/\text{km} \cdot 35\ \text{km} = 2{,}38\ \ell$$

Schematisch lässt sich dies wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{rr} 100\ \text{km} & 6{,}8\ \text{L} \\ :100\downarrow & :100\downarrow \\ 1\ \text{km} & 0{,}068\ \text{L} \\ \cdot 35\downarrow & \cdot 35\downarrow \\ 35\ \text{km} & 2{,}38\ \text{L} \end{array}$$

Stehen verschiedene Größen in einem umgekehrtproportionalen Verhältnis zueinander, so sind die Rechenvorschriften jeweils entgegengesetzt anzuwenden.

Beispiel:

2 Maler benötigen für das Streichen eines Hauses 5 Tage. Wie lange benötigen 5 Maler, wenn alle gleich schnell arbeiten?

Zwei Maler brauchen 5 Tage für das Streichen des Hauses. Das bedeutet, ein Maler benötigt

$$2 \cdot 5\ \text{Tage} = 10\ \text{Tage}$$

Das heißt, 5 Maler sind schneller als zwei, denn

$$10\ \text{Tage} : 5 = 2\ \text{Tage}$$

Sie benötigen also nur 2 Tage:

$$\begin{array}{rr} 2\ \text{Maler} & 5\ \text{Tage} \\ :2\downarrow & \cdot 2\downarrow \\ 1\ \text{Maler} & 10\ \text{Tage} \\ \cdot 5\downarrow & :5\downarrow \\ 5\ \text{Maler} & 2\ \text{Tage} \end{array}$$

Lernvideos

Dreisatz Direkte Proportionalität Indirekte Proportionalität

Zu den Übungen: 5.7

1.8. Lineare Gleichungssysteme

Lernvideo: **Lineare Gleichung**

Ein Lineares Gleichungssystem (**LGS**) ist ein System aus linearen Gleichungen, das mehrere unbekannte Variablen enthält.
Grundlegende Techniken zur Lösung solcher Systeme sind:

1. Einsetzungsverfahren
2. Gleichsetzungsverfahren
3. Additionsverfahren

Im Grunde arbeiten alle drei Verfahren gleich: Sie reduzieren die Anzahl der Unbekannten und die Anzahl der Gleichungen schrittweise bis die erste Unbekannte bestimmt ist. Danach werden rekursiv alle weiteren Unbekannten bestimmt.

Beispiel:

Alle drei Verfahren lösen das LGS: $3x + 2y = 9$ und $4x - y = 1$ eindeutige mit $x = 1$ und $y = 3$:

1. **Einsetzungsverfahren:** Die 2. Gleichung wird nach y aufgelöst und in die 1. Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} y &= 4x - 1 \\ \Rightarrow 3x + 2(4x-1) &= 9 \\ \Leftrightarrow 11x &= 11 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

   Einsetzen in die 2. Gleichung liefert: $y = 4 \cdot 1 - 1 \Rightarrow y = 3$

2. **Gleichsetzungsverfahren:** Die 1. und 2. Gleichung werden nach y aufgelöst und beide gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(9-3x) \\ y &= 4x - 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(9-3x) &= 4x - 1 \\ 9 - 3x &= 8x - 2 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

   Einsetzen in eine der Gleichungen liefert: $y = \frac{1}{2}(9-3) \Rightarrow y = 3$

3. **Additionsverfahren:** Wir addieren hier das Doppelte der zweiten Gleichung zur ersten Gleichung:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 9 \\ 4x - y &= 1 \\ \Rightarrow 3x + 2y + 2(4x - y) &= 9 + 2 \\ 3x + 8x &= 11 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

   Einsetzen in eine der Gleichungen liefert: $y = 3$

Lösungsmenge eines Linearen Gleichungssystems

LGS können genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben. Die oben gezeigten Techniken übertragen sich auf LGS mit beliebig vielen Veränderlichen oder Gleichungen.

Beispiele:

1. Das LGS

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 9 \\ 4x - y &= 1 \\ 2x - 2y &= 3 \end{aligned}$$

hat keine Lösung: Wir erhalten aus den ersten beiden Gleichungen: $x = 1$ und $y = 3$. Dies erfüllt aber nicht die dritte Gleichung, daher hat dieses LGS keine Lösung.

2. Das folgende Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x + y - z &= -8 \end{aligned}$$

Subtrahieren wir die erste von der zweiten Gleichung (wir addieren das (-1)-fache), so bekommen wir:

$$-2z = -12 \Leftrightarrow z = 6$$

Addieren wir die erste zur zweiten Gleichung, so bekommen wir:

$$2x + 2y = -4 \Leftrightarrow x + y = -2 \Leftrightarrow y = -x - 2$$

Da wir nun alles ausgenutzt haben und beide Gleichung erfüllt sind, lässt sich y nur in Abhängigkeit von x festlegen. Das bedeutet, wir können die Lösungsmenge wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} &x \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ &y = -x - 2 \\ &z = 6 \end{aligned}$$

Lernvideos

LGS Lösungsmenge LGS

Zu den Übungen: 5.8

2. Funktionen

Definition 2.1:
Eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen ist eine Vorschrift f, die jeder Zahl $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ genau eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Die Definitionsmenge ist Teil der Definition einer Funktion. Wird diese nicht angegeben, so ist der größtmögliche Definitionsbereich (in $\mathbb{R}$) gemeint.

Funktionen sind **Abbildungen**, sie bilden ihren **Definitionsbereich** auf den **Wertebereich** ab. Schreibweise:

$$f\,:\,D \to W$$

$f(x)$ bezeichnet den Wert der Funktion an der Stelle x. Die übliche Sprechweise "Die Funktion $f(x) = ...$" ist streng genommen ungenau. Man meint damit: "Die Funktion f mit dem Definitionsbereich D und der Abbildungsvorschrift $f(x) = ...$".

Der **Graph einer Funktion** ist eine **Menge von Punkten**: $G_f = \{(x, f(x))|x \in D\}$

Beispiel

Die Funktionen $f : (0{,}17] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{x}$ haben die selbe Abbildungsvorschrift, unterscheiden sich jedoch offensichtlich sehr deutlich voneinander.

Nullstellen

Definition 2.2:
Hat eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ den Funktionswert $f(x_0) = 0$, so heißt x_0 eine **Nullstelle** der Funktion f.

Nullstellen sind jene Stellen, an denen der Funktionsgraph einer Funktion die x-Achse schneidet oder berührt.

2.1. Lineare Funktionen

Definition 2.3:
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ heißt **linear**.

Die Graphen dieser Funktionen sind immer Geraden, deren Steigung a ist. Der y-Achsenabschnitt ist durch $f(0) = b$ gegeben.

Zwei-Punkte-Form und Punkt-Steigungs-Form

Sind zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ der Geraden gegeben, so bekommt man die Geradengleichung aus dem **Steigungsdreieck**:

$$a = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Auch die Punkt-Steigungs-Form bekommt man aus diesem elementaren Zusammenhang.

Beispiele:

1. Gesucht sei die Gerade durch die Punkte $P_1 = (2, -3)$ und $P_2 = (-1{,}4)$.

$$\Rightarrow \frac{f(x) - (-3)}{x - 2} = \frac{4 - (-3)}{-1 - 2} \Leftrightarrow f(x) + 3 = -\frac{7}{3}(x - 2) \Leftrightarrow f(x) = -\frac{7}{3}x + \frac{5}{3}$$

2. Gesucht sei die Gerade mit der Steigung $a = 2$ durch den Punkt $P = (1, -3)$

$$\Rightarrow 2 = \frac{f(x) - (-3)}{x - 1} \Leftrightarrow f(x) + 3 = 2x - 2 \Leftrightarrow f(x) = 2x - 5$$

Tipp: Verdeutlichen Sie sich diese Zusammenhänge an **Steigungsdreiecken von Geraden**. Stellen Sie sicher, dass Sie diese intuitiv verwenden können.

Nullstellen linearer Funktionen

Nullstellen linearer Funktionen sind Lösungen linearer Gleichungen. Sie lassen sich durch einfache Termumformungen berechnen.

Lernvideos

Geradengleichungen **Lineare Funktionen** **Lineare Funktionen** **Steigungsmessung**

Zu den Übungen: 6.1

2.2. Quadratische Funktionen

Funktionen der Form $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}$ heißen auch quadratische Funktionen. Die zugehörigen Graphen sind Parabeln. Um den Verlauf des Graphen dieser Funktion beurteilen zu können, empfiehlt sich die Umformung in die **Scheitelform** $f(x) = a(x - B)^2 + C$ mittels quadratischer Ergänzung.

Die **quadratischer Ergänzung** bezeichnet im Allgemeinen die Ergänzug eines Terms der Form $a^2 + 2ab$ zu einem Term der Form $a^2 + 2ab + b^2$, um die rechte Seite einer binomischen Formel zu erzeugen:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Verfahren: Man bestimmt b und addiert b^2. Um den Term nicht zu verändern, wird dann b^2 direkt wieder abgezogen. Die Erzeugung der Scheitelform sieht damit wie folgt aus:

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

mit dem Scheitelpunkt $S = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = (B, C)$.

Beispiel:

$$f(x) = x^2 + 4x - 2 = (x+2)^2 - 6 \Rightarrow S = (-2, -6)$$

Bemerkung:

Liegt der Scheitel in $S = (0{,}0)$ so handelt es sich um die, mit dem Faktor a in Richtung der $f(x)$-Achse gestreckte, Normalparabel $f(x) = ax^2$. Für $a = 1$ ist dies genau die Normalparabel. Siehe hierzu: **2.9**

Tipp: Stellen Sie sicher, dass Sie jede Parabel jederzeit spontan skizzieren können.

Nullstellen quadratischer Funktionen

Nullstellen quadratischer Funktionen sind Lösungen quadratischer Gleichungen. Sie lassen sich wie oben durch eine **quadratische Ergänzung** gewinnen.

Ist die reelle Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung gesucht, so sucht man alle $x \in \mathbb{R}$, die die Gleichung erfüllen: $ax^2 + bx + c = 0$ Zur Vereinfachung ist die Division durch a zu empfehlen. (Dies ist möglich, da $a \neq 0$ gilt.)

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$ mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$

Aus dieser Form lässt sich mittels quadratischer Ergänzung und Auflösen nach x die $pq-$Formel gewinnen:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x &= -q \\ x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\ x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} &\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

Der Radikand $\rho := \dfrac{p^2}{4} - q$ wird oft auch als **Diskriminante** bezeichnet, da dieser Ausdruck direkt Aussagen zur Lösungsmenge ermöglicht:

$$\begin{aligned} \rho > 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{2 verschiedene Lösungen, 2 Nullstellen} \\ &\Rightarrow \quad \text{Der Scheitel liegt unter der } x\text{-Achse: } y_S < 0 \\ \rho = 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{1 (doppelte) Lösung, 1 Nullstelle} \\ &\Rightarrow \quad \text{Der Scheitel liegt auf der } x\text{-Achse: } y_S = 0 \\ \rho < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{keine (reelle) Lösung, keine reelle Nullstelle} \\ &\Rightarrow \quad \text{Der Scheitel liegt über der } x\text{-Achse: } y_S > 0 \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{-3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{(-3)^2}{4} - (-4)} = \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{16}{4}} \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -1$

2. $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{\dfrac{16}{4} - \dfrac{16}{4}} \Rightarrow x_1 = 2$

3. $x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-3} \Rightarrow$ keine reelle Lösung

Lernvideos

Quadratische Funktionen **Quadratische Gleichung**

Zu den Übungen: 6.2

2.3. Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Definition 2.4:
Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **Polynom** (genauer: Polynomfunktion), wenn es eine explizite Darstellung der Funktion durch

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gibt.

- Ein Ausdruck der Form $a_k x^k$ heißt **Monom und ist auch ein Polynom.**
- Der **Grad des Polynoms** ist $n \in \mathbb{N}_0$ (Bedingung: $a_n \neq 0$)
- Die a_k werden **Koeffizienten** genannt.
- Lineare Funktionen sind Polynome vom Grad eins: $p(x) = a_0 + a_1 x$
- Quadratische Funktionen sind Polynome 2. Grades: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Beispiele:

Geben Sie zu folgenden Polynomen den Grad an.

1. $p(x) = x^3 + x + 5$
2. $p(x) = 7$
3. $p(x) = (x-2)^2(x+3)$

Polynomdivision

Die Polynomdivision, auch Partialdivision genannt, verläuft analog zur Divison von Zahlen mit Rest, nur dass hier statt zweier Zahlen zwei Polynome durcheinander geteilt werden und als Ergebnis wieder ein Polynom - der "'Ganzteil"' und der Rest der Divison - stehen.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n \qquad a_0, ..., a_n \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}$$

Die höchste Potenz n gibt den Grad eines Polynoms an. Jedes Polynom n-ten Grades besitzt maximal n reelle Nullstellen. Damit lässt sich das Polynom wie folgt darstellen:

$$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) \qquad n \in \mathbb{N}$$

Die Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ sind die Nullstellen des Polynoms.

Für Polynome 0. und 1. Grades ist die Berechnung der Nullstellen sehr einfach. Auch für Polynome 2. Grades stellt die pq-Formel ein effektive Möglichkeit dar, die Nullstellen zu bestimmen. Ab dem 3. Grad wird es allerdings schon schwieriger, die Nullstellen exakt zu berechnen.

Gegeben sei nun ein Polynom $P(x)$, von dem eine Nullstelle x_1 bekannt ist. Durch den Quotienten $\frac{P(x)}{(x-x_1)}$ erhält man nun ein Polynom eines kleineren Grades. Im Falle eines Polynoms 3.

Grades erhält man danach ein quadratisches Polynom und könnte nun mit der Mitternachtsformel die übrigen Nullstellen bestimmen.

$$P(x) = x^3 - 8x^2 + 24x - 32 = 0 \qquad \text{Nullstelle: } x_1 = 4$$
$$\frac{x^3 - 8x^2 + 24x - 32}{x-4} = (x^3 - 8x^2 + 24x - 32) : (x-4) = \ldots$$

Die Division funktioniert für Polynome genau so wie die schriftliche Division ganzer Zahlen und kann nach dem gleichen Schema gelöst werden:

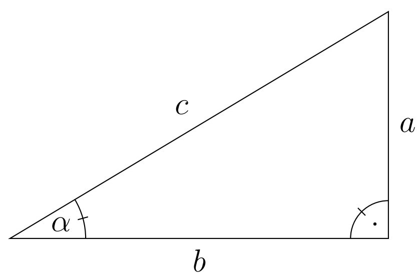
$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 - 8x^2 + 24x - 32\big) : \big(x-4\big) = x^2 - 4x + 8 \\ \underline{-\,x^3 + 4x^2} \\ \qquad -\,4x^2 + 24x \\ \qquad \underline{\;\;4x^2 - 16x} \\ \qquad\qquad\quad 8x - 32 \\ \qquad\qquad \underline{-\,8x + 32} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Lernvideos

Polynome Polynomdivision Faktorisierung Linearfaktoren

Zu den Übungen: 6.2

2.4. Winkelfunktionen



Satz 2.1. *In einem Dreieck beträgt die Winkelsumme 180°*

Satz 2.2. *In einem rechtwinkeligen Dreieck gelten für die Katheten a und b, die Hypotenuse c und die Winkelfunktionen von α, dem der Seite a gegenüberliegenden Winkel:*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Satz 2.3. *(Satz des Pythagoras) In einem rechtwinkeligen Dreieck gelten für die Katheten a und b, die Hypotenuse c:*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Aus dem Satz des Pythagoras folgt direkt:

Satz 2.4. *Die Summe der Quadrate von Sinus und Kosinus desselben Winkels ist 1:*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Beweis.

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

□

Aus Symmetriegründen folgt weiter: $\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$ und $\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$

Lernvideos

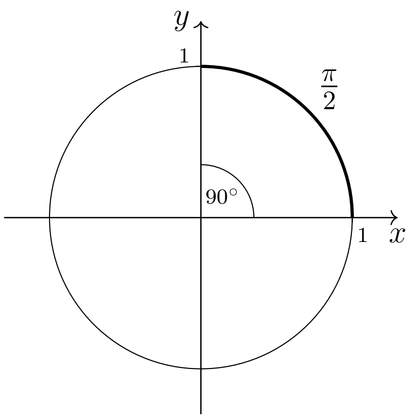
Winkelfunktionen Winkelfunktionen am Einheitskreis

Das Bogenmaß

Jeder Winkel α lässt sich eindeutig durch die Länge des zugehörigen Kreisbogens des Einheitskreises darstellen. Dieser Wert für einen Winkel wird Bogenmaß genannt. Der Kreisumfang des Einheitskreises ist 2π. Folglich entspricht der Bogen der Länge π einem Winkel von $180°$ im Gradmaß.

$$1° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{180}$$

Die Umrechnung eines Winkels α im Gradmaß in das Bogenmaß erfolgt mit: $rad(\alpha) = \alpha \dfrac{\pi}{180°}$

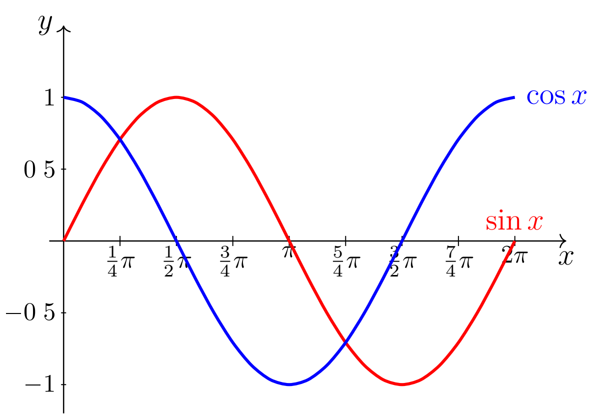


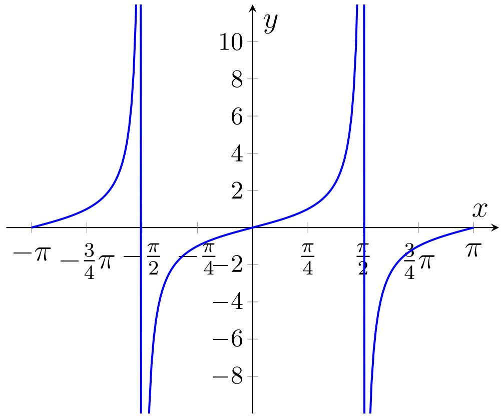
Lernvideos

Bogenmaß

Die Funktionsgraphen der Winkelfunktionen

Die Funktionsgraphen der Winkelfunktionen sollte man kennen. Die folgende Abbildung zeigt jeweils den Ausschnitt über eine Periode der Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion, sowie des Tangens:





Wichtige Funktionswerte und Periodizität

Einfache Funktionswerte für Winkelfunktionen gibt es für 0° und für alle Vielfachen von 30° und 45°. Es genügt, diese Werte für die entsprechenden Winkel bis 90° zu kennen, danach wiederholen sie sich mit wechselnden Vorzeichen gemäß der Periodizität der Winkelfunktionen.

Winkel	Bogen	Sinus	Kosinus	Tangens
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	$\pm\infty$

Als Merkhilfe: Die halbe Quadratwurzel der ganzen Zahlen 0 bis 4 ergibt die Funktionswerte der Sinusfunktion für die Winkel 0°, 30°, 45°, 60°, 90°:

$$\frac{1}{2}\sqrt{0},\ \frac{1}{2}\sqrt{1},\ \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\sqrt{4}$$

Die entsprechenden Funktionswerte für die Kosinusfunktion haben die umgekehrte Reihenfolge. Die Funktionswerte der Tangensfunktion folgen dann aus: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Die Perioden von Sinus und Kosinus sind jeweils 2π, die des Tangens ist π:

- $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin(x)$ mit $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos(x)$ mit $k \in \mathbb{Z}$
- $\tan(x + k \cdot \pi) = \tan(x)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Die Nullstellen der Winkelfunktionen hängen wie folgt zusammen:

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Lernvideos

Funktionswerte Funktionswerte Teil 2

Zu den Übungen: 6.4

2.5. Die Umkehrfunktion

Ergibt die Verkettung zweier Funktionen jeweils (unabhängig von der Reihenfolge) die **Identitätsfunktion** $h(x) = x$, so ist die eine Funktion **Umkehrfunktion** der anderen. (Zur Begriffsklärung der Verkettung siehe auch **2.10**.)

$$(g \circ f)(x) = x = (f \circ g)(x)$$

Folgendes Beispiel liefert einen derartigen Zusammenhang:

$$f(x) = x + 1,\; g(x) = x - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = ((x - 1) + 1) = x$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = ((x + 1) - 1) = x$$

Also ist f die Umkehrfunktion zu g und umgekehrt. Für die Umkehrfunktion zu einer Funktion f nutzt man folgende Schreibweise:

$$f^{-1}(x)$$

ACHTUNG:

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

Die Schreibweise „hoch -1“ hat ihren Ursprung in der linearen Algebra (Matrizen als Abbildungen) und unterliegt nicht den hier besprochenen Regeln für Potenzen reeller Zahlen.

Es kann notwendig sein, den Definitionsbereich einer Funktion anzupassen, um die Umkehrfunktion angeben zu können (vgl. Wurzelfunktion). Um die Umkehrfunktion zu finden, wird die Funktionsgleichung in der Form $y = f(x)$ nach x aufgelöst. Oftmals wird die Variable der Umkehrfunktion dann wieder in x umbenannt. Der Graph der Umkehrfunktion entsteht aus dem Graph der Originalfunktion durch Spiegelung an dem Graphen der Identitätsfunktion $f(x) = x$; dies ist die Ursprungsgerade mit Steigung 1.

Bemerkung: Sie nutzen Umkehrfunktionen, wenn Sie Gleichungen auflösen. Dabei wird die Umkehrfunktion auf beiden Seiten angewendet, um nach der Veränderlichen aufzulösen. Das Ihnen bekannteste Beispiel hierfür dürfte die Wurzelfunktion sein.

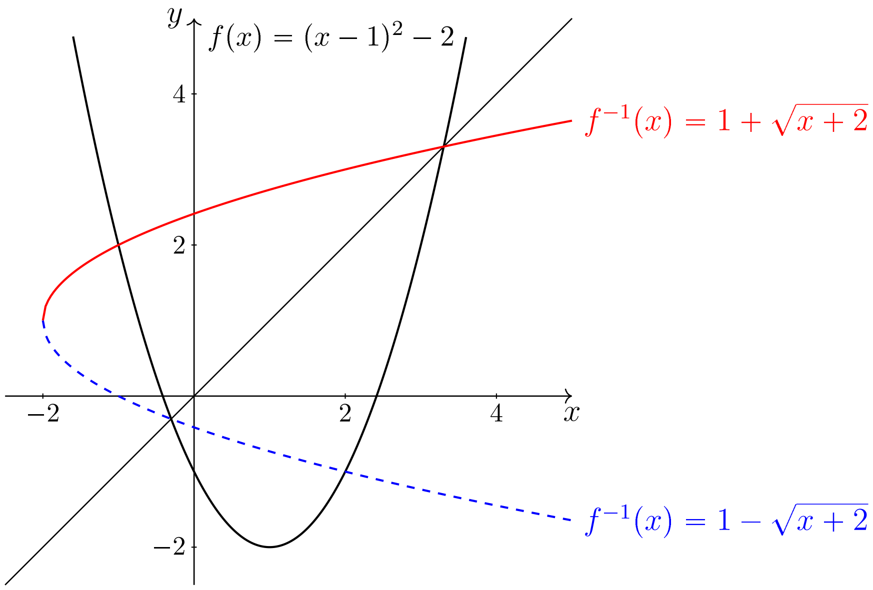
Beispiele:

1. $y = f(x) = \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y} - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 1$
2. $y = f(x) = e^{x+3} \Rightarrow \ln y = x + 3 \Rightarrow x = \ln y - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x - 3$
3. $y = f(x) = (x - 1)^2 - 2 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y + 2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y + 2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+2}, & f^{-1}(x) \geqslant 1 \\ f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+2}, & f^{-1}(x) < 1 \end{cases}$$

   Damit ist $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 2}$ die Umkehrfunktion zu
   $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x - 1)^2 - 2$
   und $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x + 2}$ ist die Umkehrfunktion zu
   $f : (1, -\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x - 1)^2 - 2$. Das folgende Bild zeigt die durch f gegebene

Parabel sowie die Graphen der beiden Umkehrfunktionen:



Lernvideos

Umkehrfunktion **Umkehrfunktion Beispiele** **Umkehrfunktion Beispiele 2**

Zu den Übungen: 6.5

2.6. Wurzelfunktionen

Die Wurzelfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ist die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2$ **für** $\mathbf{x \geqslant 0}$.

Beispiele:

1. $x^2 = 4 \Leftrightarrow \pm\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$
2. $27x^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27x^3} = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$
3. $\dfrac{x^4}{5} = 2000 \Leftrightarrow x^4 = 10000 \Leftrightarrow \pm\sqrt[4]{x^4} = \pm\sqrt[4]{10000} \Leftrightarrow x = \pm 10$

Passende Lernvideos finden Sie im Kapitel Grundlagen im Abschnitt **1.4**.

Zu den Übungen: 6.6

2.7. Exponentialfunktionen und Logarithmen

Eine Exponentialfunktion ist eine Funktion mit der Abbildungsvorschrift

$$f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R},\ fest$$

Der Hinweis „fest“ besagt, dass a eine Konstante ist. Die Exponentialfunktion zur Basis e (Eulersche Zahl) nennt sich **natürliche Exponentialfunktion**, welche Anwendung in vielen Bereichen der Technik und Wirtschaftsmathematik findet.

$$f(x) = e^x$$

Ihre Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus: $f^{-1}(x) = \ln x$

Spricht man von „der Exponentialfunktion“, so ist im Allgemeinen die natürliche Exponentialfunktion gemeint. Spricht man von „der Logarithmusfunktion“ oder „Dem Logarithmus“, so ist im Allgemeinen die natürliche Logarithmusfunktion gemeint.

Mit den Rechenregeln für die Potenzrechnung und den daraus abgeleiteten Regeln für das Rechnen mit Logarithmen bekommt man leicht folgende Zusammenhänge:

$$a^x = e^{x \ln a},\ a \in \mathbb{R}^+ \text{ und } \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b},\ b \in \mathbb{R}^+$$

Passende Lernvideos finden Sie im Kapitel Grundlagen im Abschnitt **1.4**.

Zu den Übungen: 6.7

2.8. Symmetrieeigenschaften von Funktionen

Definition 2.5:
Eine Funktion f heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt. Sie heißt ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ erfüllt ist.

Beispiele:

1. $\cos x = \cos(-x)$, $x^2 = (-x)^2$
2. $-\tan x = \tan(-x)$, $x^3 = -(-x)^3$

Eine gerade Funktion besitzt einen zur y-Achse symmetrischen Funktionsgraphen. Ist eine Funktion ungerade, so ist ihr Funktionsgraph punktsymmetrisch zum Ursprung.

Zu den Übungen: 6.8

2.9. Translationen, Streckung und Stauchung

Mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ lassen sich Transformationen eines Funktionsgraphen erzeugen:

$$f(x+c) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c > 0 & \text{Translation um } c \text{ nach links} \\ c < 0 & \text{Translation um } |c| \text{ nach rechts} \end{cases}$$

$$f(x)+c \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c > 0 & \text{Translation um } c \text{ nach oben} \\ c < 0 & \text{Translation um } |c| \text{ nach unten} \end{cases}$$

$$f(cx) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} & \text{horizontale Stauchung um den Faktor } |c| \\ c < 0 & \text{zusätzlich: Spiegelung an der vertikalen Achse} \end{cases}$$

$$cf(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} & \text{vertikale Streckung um den Faktor } |c| \\ c < 0 & \text{zusätzlich: Spiegelung an der horizontalen Achse} \end{cases}$$

Beispiele:

1. $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ Der Graph der Kosinusfunktion entspricht dem um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobenen Graph der Sinusfunktion.
2. $2 \sin x \Leftrightarrow$ Verdoppelung der Amplitude von $\sin x$
3. $\sin(2x) \Leftrightarrow$ Verdoppelung der Frequenz von $\sin x$

Lernvideos

Funktionsgraphen

Zu den Übungen: 6.9

2.10. Kombinationen und Verkettungen von Funktionen

Die Addition, Multiplikation etc. von Funktionen nennt man (algebraische) **Kombinationen**. Diese ergeben neue Funktionen, wobei der neue Definitionsbereich die Schnittmenge der vorherigen Definitionsbereiche ist. Für die Division muss zusätzlich sicher gestellt sein, dass der Nenner nicht Null wird.

Beispiele:

Mit $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 1$, $D_f = D_g = \mathbb{R}$ lassen sich etwa folgende neue Funktionen generieren:

1. $f(x)g(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1 = r(x)$, $D = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$
2. $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x+1}{x-1}$ Hier hat sich der Definitionsbereich geändert: $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

Eine Verkettung ist eine Hintereinanderausführung von Funktionen (auch Komposition genannt):

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Achtung: Im Allgemeinen ist die Verkettung **nicht kommutativ**: $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

Beispiele:

Mit $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ mit $x \neq 1$ bzw. $x \neq -1$ ergeben sich folgende Kompositionen:

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1+g(x)}{1-g(x)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{1+x}}{1-\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{\dfrac{1+x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1+x}-\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{2+x}{x} = 1 + \dfrac{2}{x}$
   Zum Definitionsbereich: Da g nur für $x \neq -1$ definiert ist und $g(0) = 1$ die kritische Stelle für f ergibt, ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-1{,}0\}$
2. Analog folgt aber für
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{1+f(x)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}(1-x)$
   Zum Definitionsbereich: Da g nur $x \neq -1$ fordert und $f(x) \neq -1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

Verkettung mit der Betragsfunktion:

- $|f(x)| \Rightarrow$ Spiegelung negativer Funktionswerte an der horizontalen Achse
- $f(|x|) \Rightarrow$ Spiegelung der Funktionswerte für positive x an der vertikalen Achse

Lernvideos

Verkettete Funktionen Verkettete Funktionen 2

Zu den Übungen: 6.10

3. Differenzial- und Integralrechnung

Im Folgenden finden Sie eine kurze anwendungsorientierte Zusammenfassung der einfachsten Aspekte der Differenzial- und Integralrechnung. Es wird auf wichtige Details und eine exakte Formulierung verzichtet. Beides wird im Rahmen der Mathematik-Vorlesungen nachgereicht. Sie sollten aber schon von Beginn des Studiums an ein rudimentäres Verständnis für Differenzial- und Integralrechnung besitzen, da diese Kenntnisse in anderen Vorlesungen erwartet werden.

3.1. Differenzialrechnung

Die Basisableitungen und die Ableitungsregeln

Definition 3.1:
Die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x wird u.a. mit $f'(x)$ bezeichnet.

$f(x)$	ax	x^n	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$-\cos x$	$\sin x$	e^x	$\arctan x$
$f'(x)$	$a = const.$	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	e^x	$\frac{1}{1+x^2}$

Satz 3.1. *Sind $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante, dann gilt:*

Linearität	$(cf)' = c \cdot f'$	$(cf(x))' = c \cdot f'(x)$
Linearität	$(f+g)' = f' + g'$	$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
Kettenregel	$(f \circ g)' = f' \cdot g'$	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Tipp: Sie sollten diese Basisableitungen und die Ableitungsregeln auswendig kennen. Damit können Sie jede weitere Ableitung gewinnen.

Beispiele:

1. Die Ableitung von Funktionen mit Brüchen und Wurzelausdrücken bekommt man durch Umformung in eine Potenz und Anwendung der Ableitungsregel für ein Monom: $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$
3. $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \text{ oder} \\ 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{cases}$
4. $(3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cos x$

5. $(\sin x \pm \ln x)' = \cos x \pm \frac{1}{x}$
6. $(\sin x \cdot \ln x)' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$
7. $\left(\frac{\sin x}{\ln x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot \ln x - \sin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$
8. $(\sin(\ln x))' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$
9. $(\ln(\sin x))' = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \dfrac{1}{\tan x} = \cot x$

Lernvideos

Ableitung Ableitungen 2 Ableitungensregeln

Zu den Übungen: 7.1

3.2. Anwendungen der Differenzialrechnung

Lokale Änderungsrate

In vielen Anwendungen ist man am lokalen Änderungsverhalten einer Funktion interessiert. "Lokal" meint "an einer Stelle $x_0 \in D$". Diese lokale Änderungsrate ist die Steigung der Funktion an der Stelle x_0. Sie gibt näherungsweise an, wie sich der Funktionswert ändert, wenn sich x_0 ein klein wenig ändert.

Beispiel:

Die lokale Änderungsrate der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_1 = 3$ ist gegeben durch den Funktionswert der Ableitungsfunktion f' an der Stelle $x_1 = 3$:

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Die Steigung der Funktion f an der Stelle $x_1 = 3$ ist 6. Das heißt, der Funktionswert ändert sich etwa um das 6-fache der Änderung des x-Wertes, wenn letzterer nur ein klein wenig geändert wird.

Tangente an einen Funktionsgraph

Die Gleichung einer Tangente an einer Stelle $x_0 \in D$ an den Graph der Funktion f gewinnt man aus dem Steigungsdreieck. (Vgl. hierzu: Punkt-Steigungs-Form einer Geraden)

Beispiel:

Gesucht sei die Tangente an der Stelle $x_0 = 1$ an den Graph der Funktion $f = x^2 - 4$.

Der Punkt durch den die Tangente geht, ergibt sich aus der vorgegebenen Stelle und dem Funktionswert an dieser Stelle:

$$P = (1, f(1)) = (1, -3)$$

Die Steigung ist gleich der Ableitung von f an dieser Stelle:

$$f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

So folgt aus dem Steigungsdreieck für die Funktionsgleichung der Tangente t:

$$2 = \frac{t(x) - (-3)}{x - 1} \Leftrightarrow t(x) + 3 = 2x - 2 \Leftrightarrow t(x) = 2x - 5$$

Extremstellen

Definition 3.2:
Extremstellen (auch: Extremalstellen) sind die Stellen $x \in D$ an denen die Funktion ein lokales Maximum oder Minimum annimmt.

ACHTUNG 1: Eine Stelle $x \in D$ ist selbst **kein** Minimum oder Maximum!

ACHTUNG 2: Wendepunkte und Sattelpunkte sind keine Extremstellen!

Satz 3.2. *Hat eine Funktion $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ ein* ***lokales Minimum oder Maximum*** *und ist in x_0 differenzierbar, dann gilt*

$$f'(x_0) = 0$$

Eine **notwendige** Bedingung für eine Extremstelle ist also, dass die erste Ableitung an dieser Stelle Null ist! Diese Bedingung nutzt man, um mögliche Kandidaten für Extremstellen zu finden. Die Kandidaten werden danach einzeln auf ihre Eigenschaften überprüft.

Um zu Prüfen, ob die Funktion in der Umgebung um eine Extremstelle x_0 steigt oder fällt wird die zweite Ableitung der Funktion an dieser Stelle betrachtet.

Satz 3.3. *Ist eine Funktion $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ in x_0 zweimal differenzierbar und $f'(x_0) = 0$ dann gilt:*

f hat in x_0 ein lokales ***Minimum****, wenn $f''(x_0) > 0$*

f hat in x_0 ein lokales ***Maximum****, wenn $f''(x_0) < 0$*

Bemerkungen

1. Die **Ränder** eines abgeschlossenen Intervalls D müssen gegebenenfalls gesondert untersucht werden.
2. Ist $f''(x_0) = 0$, kann mit diesem Satz keine Aussage getroffen werden. Die Stelle ist dann mit anderen Hilfsmitteln zu untersuchen.

Beispiel:

Wir untersuchen die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ auf Extremalstellen und bilden dafür zunächst die benötigten Ableitungen:

$$f'(x) = x^2 - 8x + 7 \text{ und } f''(x) = 2x - 8$$

Die verschwindende erste Ableitung liefert die Kandidaten für Extremalstellen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 7$$

Mit der zweiten Ableitung entscheiden wir, ob und welche Extrema vorliegen:

$$f''(x_1) = -6 < 0 \Rightarrow f \text{ hat ein lokales Maximum in } x_1 = 1$$
$$f''(x_2) = 6 > 0 \Rightarrow f \text{ hat ein lokales Minimum in } x_2 = 7$$

Lernvideos

Steigung Tengente Linearisierung Extremstellen

Zu den Übungen: 7.2

3.3. Integralrechnung

Bestimmte Integrale sind Integrale mit Integrationsgrenzen. Eine einfache Interpretation eines Integrals ist, dass sein Wert der Summe der Flächen zwischen Funktionsgraph und x-Achse entspricht; wobei Flächen unter der x-Achse subtrahiert werden. Die Berechnung bestimmter Integrale erfolgt mit folgendem Satz:

Satz 3.4. *Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei auf (a, b) stetig differenzierbar und ihre Ableitung F' sein integrierbar, dann gilt :*

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) =: F|_a^b =: [F]_a^b$$

Das heißt, wir müssen zur Berechnung eines Integrals $\int_a^b F'(x)dx$ dessen Integrand die Ableitungsfunktion von F ist, lediglich die Integrationsgrenzen in F einsetzen und die Differenz $F(b) - F(a)$ bilden. Im Allgemeinen liegt die Funktion F nicht vor und muss aus dem Integrand bestimmt werden:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx$$

Definition 3.3:
Wenn die Ableitungsfunktion von F mit f bezeichnet wird, dann heißt F ***eine*** **Stammfunktion** zu f.

ACHTUNG: F ist ***nicht*** **die** Stammfunktion zu f; „die“ Stammfunktion gibt es nicht. Zwei verschiedene Stammfunktionen zu einer Funktion unterscheiden sich durch eine Konstante.

Wichtige Stammfunktionen

Die folgende Tabelle listet jeweils eine Stammfunktion F zu einer Funktion f. Sie können zu jeder dieser Stammfunktionen eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ addieren.

$f(x)$	1	x	$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\sin x$	$\cos x$	e^x	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{x}$
$F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$-\frac{1}{x}$	$-\cos x$	$\sin x$	e^x	$\arctan x$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

Mit den Regeln der Potenzrechnung lassen sich ebenso einfach alle anderen Wurzelausdrücke und Brüche durch Ausnutzung der Integrationsregel für das Monom integrieren. Viele

Integrale lassen sich mit der **Linearität der Integration** lösen:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \text{ und } \int c\cdot f(x)dx = c\int f(x)dx,\ c\in\mathbb{R}$$

Beispiele:

1. Mit der Linearität und der Stammfunktion zu x^n lassen sich Polynome integrieren: $\int_{-1}^{2}(x^3+2x-1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4+x^2-x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{16}{4}+4-2\right)-\left(\frac{1}{4}+1+1\right) = \frac{15}{4}$
2. Die Bestimmung des Flächeninhaltes unter der Sinuskurve zwischen 0 und π: $\int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi)-(-\cos(0)) = 2$

Lernvideos

Stammfunktionen

Zu den Übungen: 7.3

4. Vektorrechnung

4.1. Formeln zur Geometrie

Im Folgenden sei a jeweils die Grundseite der betrachteten Fläche. Die Höhe wird orthogonal zur Grundseite bestimmt.

Rechteck

Für ein Rechteck mit Seitenlängen a und b gilt:

- Umfang: $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
- Fläche: $A = a \cdot b$

Parallelogramm

Für ein Parallelogramm mit Seitenlängen a und b und Höhe h gilt:

- Umfang: $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
- Fläche: $A = a \cdot h$

Kreis

Für einen Kreis mit Radius r gilt:

- Umfang: $U = 2 \cdot \pi \cdot r$
- Fläche: $A = \pi \cdot r^2$

Dreieck

Für ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c und Höhe h gilt:

- Umfang: $U = a + b + c$
- Fläche: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

Quader

Für einen Quader mit Seitenlängen a, b und c gilt:

- Oberfläche: $O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c$
- Volumen: $V = a \cdot b \cdot c$

Pyramide (mit quadratischer Grundfläche)

Für eine Pyramide mit Grundseitenlänge a und Höhe h gilt:

- Oberfläche: $O = a^2 + 2 \cdot a \cdot \sqrt{h^2 + (\frac{a}{2})^2}$
- Volmen: $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

Kreiskegel

Für einen Kegel mit Radius r und Höhe h gilt:

- Oberfläche: $O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$
- Volmen: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Kreiszylinder

Für einen Zylinder mit Radius r und Höhe h gilt:

- Oberfläche: $O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
- Volmen: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Kugel

Für eine Kugel mit Radius r gilt:

- Oberfläche: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
- Volmen: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Lernvideos

Flächeninhalte Volumen1 Volumen2 Volumen3 Kugeloberfläche

Zu den Übungen: 7.5

4.2. Vektoren

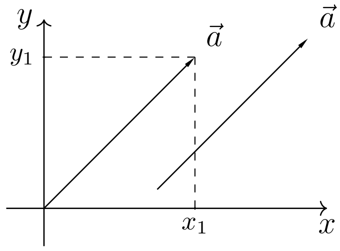
Definition 4.1:
Größen, deren Werte reelle Zahlen sind, werden **Skalare** genannt. Im Unterschied dazu werden Größen, zu deren vollständiger Charakterisierung sowohl eine **Maßzahl als auch eine Richtung** (und manchmal ein Drehsinn) erforderlich sind, **Vektoren** genannt. (I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, und H. Mühlig. Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harry Deutsch, 2006.)

- Beispiele für Skalare sind: Masse, Temperatur, Energie und Arbeit
- Beispiele für Vektoren sind: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung sowie elektrische und magnetische Feldstärke.

Die Notation für Vektoren hängt von der Anwendung ab, üblich sind Kleinbuchstaben, meist fett oder mit einem kleinen Pfeil:

$$\overrightarrow{a} \text{ oder } \mathbf{a}$$

Die Forderung, dass ein Vektor eine **eindeutige Richtung** hat, bedeutet, dass wir für konkrete Vektoren zunächst festlegen müssen, **in welchem Raum** sich diese befinden. Die Eigenschaften Länge und Richtung lassen sich dann durch Pfeile in dem jeweiligen Raum darstellen. Diese Pfeile können sich bezüglich der Richtung, in die sie zeigen, und bezüglich ihrer Länge unterscheiden. Eine direkte Folgerung aus der Definition ist, dass **alle parallel verschobenen Vektoren identisch** sind, da sie die selbe Richtung und Länge haben.



Hieraus folgt weiter, dass alle Vektoren mit dem Fuß in den Ursprung gelegt werden können. (Dieser spezielle Repräsentant des Vektors wird auch **Ortsvektor**genannt.) Und daraus folgt weiter, dass der Punkt auf dem dann die Spitze eines Vektors liegt, diesen exakt bestimmt. Daher können Vektoren wie Punkte durch ein Tupel von Koordinaten angeben werden:

Definition 4.2:
Ein n-dimensionaler Vektor ist ein n-Tupel reeller Zahlen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \; a_i \in \mathbb{R}$$

Die a_i werden Koordinaten oder Komponenten von $\vec{a}$ genannt.

4.2.1. Rechenoperationen mit Vektoren

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Vektoraddition: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

2. Multiplikation mit einem Skalar: $\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$

	Vektoraddition	Multiplikation mit Skalar
Kommutativgesetze	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	$\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$
Assoziativgesetze	$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$	$(\lambda\mu)\,\vec{a} = \lambda\,(\mu\vec{a})$
Ex. d. neutralen Elements	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	$\vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$
Ex. d. inversen Elements	$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	$\lambda\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{1}{\lambda}\vec{b}$
Distributivgesetze	$\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ und $(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$	

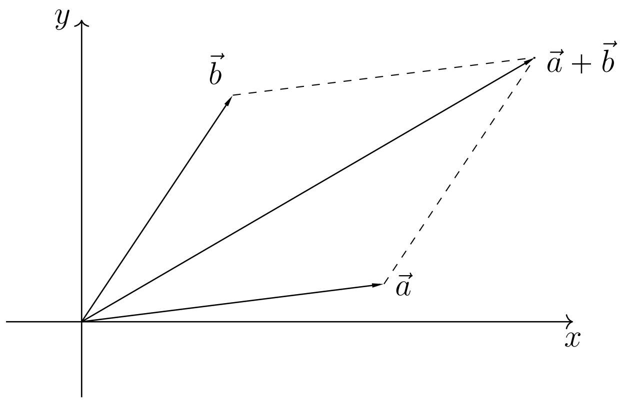
Bemerkung: Die Subtraktion folgt aus 1. und 2. als Addition des mit -1 multiplizierten Vektors:
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + ((-1)\vec{b})$

Beispiele:

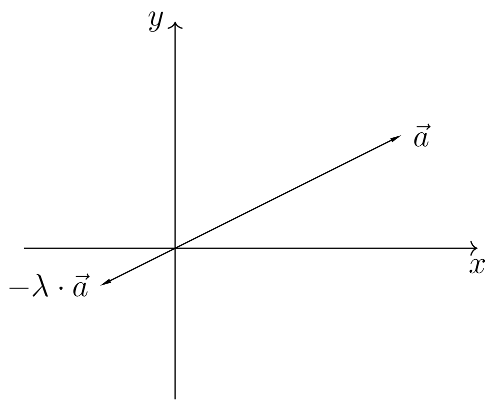
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation (nur für $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sinnvoll):

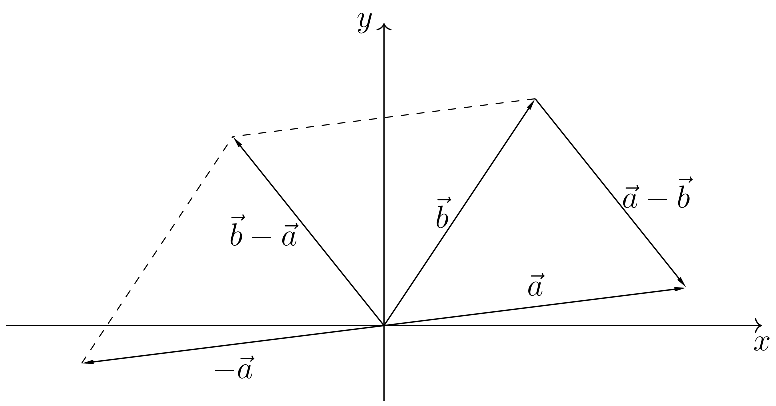
- Die Addition zweier Vektoren gelingt durch Parallelverschiebung:



- Die Multiplikation mit einem Skalar λ entspricht einer Streckung um λ. Ist $\lambda < 0$ entspricht diese Multiplikation zusätzlich einer Spiegelung am Ursprung (hier mit $|\lambda| < 1$):



- Die Subtraktion folgt aus der Addition eines mit -1 multiplizierten Vektors. Hier ist auch gut zu sehen, dass der Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ aus dem Vektor $\vec{b} - \vec{a}$ entsteht indem die Richtung umgedreht wird.



Betrag eines Vektors

Der Betrag (auch: Länge oder Modul) eines Vektors ergibt sich im Fall der kartesischen Koordinatendarstellung in der Ebene aus dem Satz des Pythagoras:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$$

Diese Definition gilt äquivalent auch für beliebig höher dimensionale Vektorräume:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + \ldots + (v_n)^2}$$

Abstand zweier Vektoren

Der Abstand zweier Vektoren ist dann durch die Länge des Vektors gegeben, der die Differenz dieser beiden Vektoren ist. Dies ist äquivalent zum Abstand der beiden Punkte, die durch die Tupel repräsentiert sind.

$$d\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$$

Beispiel

Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass der Vektor $\vec{b}$ doppelt so lang ist, wie der Vektor $\vec{a}$, wenn gilt: $2\vec{a} = \vec{b}$ und $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$

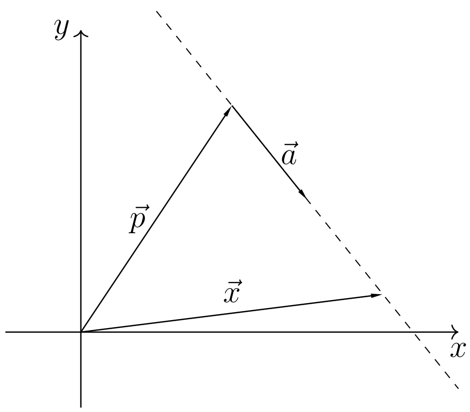
Vektorielle Punkt-Richtungsform oder Parameterform einer Geraden:

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{a},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Dabei ist:

- $\vec{p}$ der Stützvektor (Der Startpunkt, wenn $\vec{p}$ als Ortsvektor interpretiert wird.)
- $\vec{a}$ der Richtungsvektor, dieser darf nicht der Nullvektor sein
- λ ist der Parameter

Von $\vec{p}$ ausgehend können wir durch die Addition von $\lambda\vec{a}$ jeden Punkt $\vec{x}$ der Gerade darstellen.



Folgerungen:

- Ein Punkt Q gegeben durch seinen Ortsvektor $\vec{q}$ liegt auf der Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{a}$, wenn es ein λ gibt, für das gilt: $\vec{q} = \vec{p} + \lambda\vec{a}$
- Zwei Geraden sind parallel zueinander, wenn ihre Richtungsvektoren kollinear sind: $g_1 \| g_2 \Leftrightarrow \vec{a_1} \| \vec{a_2}$

- Zwei Geraden sind identisch, wenn sie parallel sind und (mindestens) ein Punkt existiert, der beide Geradengleichungen erfüllt. $g_1 = g_2 \Leftrightarrow g_1 \| g_2 \wedge \vec{p_1} + \lambda \vec{a_1} = \vec{q} = \vec{p_2} + \lambda \vec{a_2}$

Beispiele:

- $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in g,\, Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \notin g$

- $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 \| g_2$ für $a = 2$, sonst : $g_1 \nparallel g_2$

- Die Geraden $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind identisch, weil sie parallel $g_1 \| g_2$ sind und der Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, der sicher auf g_1 liegt, mit $\mu = -1$ auch auf g_2 liegt.

Der Schnittpunkt zweier Geraden

Der **Schnittpunkt** (gegeben durch $\vec{q}$) erfüllt beide Geradengleichungen:

$$g_1 : \vec{p} + \lambda \vec{a} = \vec{q} = \vec{r} + \mu \vec{b} \, : g_2$$

Dies liefert ein Gleichungssystem: Für jede Komponente von $\vec{q}$ erhalten wir eine Gleichung mit den Unbekannten λ, μ. Findet man Lösungen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so dass alle Gleichungen erfüllt sind, kann man den Schnittpunkt mit diesen Lösungen aus jeder der beiden Geradengleichungen bestimmen.

Beispiel:

Es soll der Schnittpunkt S der beiden Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bestimmt werden, falls sie sich schneiden.
Es muss gelten:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 + \lambda &= \mu \\ 2 + \lambda &= 7 - 2\mu \\ 3 + \lambda &= 6 - \mu \end{aligned}$$

Addieren wir die Gleichungen (1) und (3) , so folgt: $4 + 2\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1$ dies führt auf $\mu = 2$ (zum Beispiel mit Gleichung 1). Da es sich um ein überbestimmtes System handelt, muss die Richtigkeit der Lösung mit den anderen Gleichung verifiziert werden. Hier kann auch der Schnittpunkt mit einer Geradengleichung berechnet und mit der anderen überprüft werden:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Produkte von Vektoren zu definieren. Eine ist das Skalarprodukt, es hat als Ergebnis einen Skalar.

Definition 4.3:
Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n$$

Beispiel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 8 - 2 + 12 = 18$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
3. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
4. $\lambda \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \lambda\vec{b} = \lambda\vec{a} \cdot \vec{b}$
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha \, \text{mit} \, \alpha = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ Hieraus folgt auch: $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$
   Außerdem folgt, dass zwei Vektoren genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist.
6. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt

Eine weitere Möglichkeit, Produkte von Vektoren zu definieren, ist das Vektorprodukt für Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Es hat als Ergebnis einen Vektor. Das Vektorprodukt gehört nicht zur vorausgesetzten Schulmathematik, kann aber in Vorlesungen Verwendung finden, bevor es in der Mathematik-Vorlesung besprochen wurde.

Definition 4.4:

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

1. Schematisch ergeben sich für die Berechnung drei Kreuze:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times\, unten \\ - \times\ gro\text{ß} \\ \times\, oben \end{pmatrix}$$

Mit:

$$\times\, unten = \begin{matrix} a_2 & & b_2 \\ & \times & \\ a_3 & & b_3 \end{matrix} = a_2b_3 - a_3b_2$$

$$- \times\ gro\text{ß} = (-1) \cdot \begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ & \times & \\ a_3 & & b_3 \end{matrix} = -(a_1b_3 - a_3b_1) = a_3b_1 - a_1b_3$$

$$\times\, oben = \begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ & \times & \\ a_2 & & b_2 \end{matrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Vektorprodukts

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$ (bedingt kommutativ)
2. $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)
3. $\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b}$
4. Das (doppelte) Vektorprodukt ist im Allgemeinen nicht assoziativ: $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$
5. Das Ergebnis des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$, der orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ ist: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ und damit auch $\vec{a} \times \vec{b} \perp E\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, wobei $E\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene bezeichnet.
6. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\alpha$ mit $\alpha = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ Bemerkung: $\alpha \in [0, \pi] \Rightarrow \sin\alpha \geqslant 0$
7. Hieraus folgt auch direkt: Die Länge $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ ist gleich dem Flächeninhalt, des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

8. Sind $\vec{a}, \vec{b}$ kollinear, dann ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Das Vektorprodukt verschwindet genau dann, wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind. Insbesondere gilt: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
9. $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$

Lernvideos

Vektorrechnung Ebene **Vektorrechnung im Raum**

Zu den Übungen: 7.6

Teil II.

Aufgaben

5. Grundlagen

5.1. Rechentraining

Sämtliche Aufgaben zu diesem Abschnitt (Rechentraining) stammen aus: *Abele, Kammermeyer, Mohry und Zerpies;* ***Mathematik 5./6. Klasse****: Richtig Mathematik lernen, Komet Verlag,* 2007. Sie sollten diese Aufgaben (ohne Taschenrechner) in weniger als 60 Minuten lösen können. Üben Sie diese elementaren Rechnungen so oft, bis Sie Ihnen **wieder** leicht fallen.

1. Schreiben Sie als Potenzen und berechnen Sie den Wert der Potenz:

   a) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ c) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ e) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ g) $100 \cdot 100 \cdot 100$

   b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ d) $12 \cdot 12$ f) $25 \cdot 25 \cdot 25$

2. Berechnen Sie und kürzen Sie vollständig:

   a) $\frac{65}{91}$ b) $\frac{52}{78}$ c) $\frac{88}{99}$ d) $\frac{3}{10} + \frac{4}{7}$ e) $\frac{5}{18} + \frac{7}{30}$ f) $\frac{7}{10} + \frac{6}{45}$

3. Schreiben Sie als Summe einer ganzen Zahl und eines echten Bruchs:

   a) $\frac{193}{9}$ b) $\frac{432}{25}$ c) $\frac{647}{120}$

4. Beantworten Sie folgende Fragen:

   a) Welche Zahl müssen Sie durch $\frac{7}{8}$ dividieren, um $\frac{4}{5}$ zu erhalten?

   b) Durch welche Zahl müssen Sie $\frac{3}{7}$ dividieren, um $\frac{9}{14}$ zu erhalten?

5. Geben Sie die Lösung für x als gekürzten Bruch, Dezimalzahl und Prozentzahl an:

   a) $4x = 9$ b) $15x = 10$ c) $48x = 18$

6. Berechnen Sie:

   a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3$ b) $\left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$

7. Dividieren Sie schriftlich, schreiben Sie etwaige Reste als additiven Bruch:

   a) $10775 : 25$ b) $12345 : 23$ c) $4601553 : 451$

8. Dividieren Sie im Kopf (nach dem gleichen Prinzip, wie in der vorigen Aufgabe):

   a) $\dfrac{1}{99}$ b) $\dfrac{15}{14}$

9. Lösen Sie folgende Gleichungen für x:

   a) $354 \cdot 13 - x = 756 : 18$

   b) $421 \cdot x - (97 + 48) \cdot x = (15 \cdot (94 - 79) + 63) \cdot 23$

   c) $\frac{8}{25} \cdot x = 10\,\mathrm{dm}^2$ (x als Dezimalzahl in cm^2 angeben)

10. Beantworten Sie folgende Fragen:

    a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit fährt ein ICE, der für 153 km genau 45 Minuten benötigt?

    b) Herr Hurtig lässt den 45-Liter-Tank seines Autos volltanken. Der Tankwart gibt 33,5 Euro auf 100 Euro heraus. Wieviel Benzin war vor dem Tanken noch im Tank, wenn ein Liter Benzin 1,75 Euro kostet?

    c) Wieviele Schnittpunkte haben drei nicht identische, nicht parallele Geraden im Raum maximal? Wieviele sind es minimal?

11. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Quaders mit den Kantenlängen: 45 dm, 4 m, 125 cm.

12. Zerlegen Sie in Primfaktoren:

    a) 425 b) 248 c) 336 d) 225

13. Ordnen Sie die Brüche der Größe nach (Tipp: Rechnen Sie nicht, sondern vergleichen Sie.):

    a) $\frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{4}{11}$ b) $\frac{7}{15}, \frac{14}{17}$ c) $\frac{14}{25}, \frac{31}{20}, \frac{4}{15}$

14. Schreiben Sie folgende Zahlen als vollständig gekürzte Brüche:

    a) 0,125 b) 1,375 c) 1,75 d) 2,625 e) 1,875

15. Berechnen Sie:

    a) $\dfrac{\left(15 \cdot \frac{3}{20} + \frac{48}{55}\left(3 + \frac{7}{16}\right)\right) : \left(3 + \frac{1}{2}\right)}{\left(1 + \frac{9}{10}\right) : \left(1 + \frac{13}{25}\right) + \frac{3}{4} : 2}$ b) $\dfrac{\left(2 + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(1 + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}}{\left(4 + \frac{2}{5}\right)\frac{5}{12} + 2 + \frac{2}{3}}$

16. Berechnen Sie:

    a) $2{,}74 \cdot 1{,}08$ b) $6{,}55 \cdot 1{,}58$ c) $40{,}11 : 7$ d) $30 : 6{,}4$ e) $1 : 7$

Zu den Lösungen: 8.1

5.2. Rechenoperationen und Termumformungen

1. Schreiben Sie die Terme ohne Klammern und vereinfachen Sie soweit es geht.

    a) $x^2(x^3 - 2x) - x^5$
    b) $x(x-1) - x^2$
    c) $(3x+2)^2$
    d) $3x(2-3x)$
    e) $x + 1 - 2(x-1)$
    f) $2(x^2-1) - x^2$
    g) $1 - (1-3x)^2$
    h) $2x^2(2x^2+1)$
    i) $2(x+1) - 3(x+2)$
    j) $(x - x^3)x^2$

2. Schreiben Sie folgende Terme ohne Klammern und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

   a) $(9 + 4x - a) \cdot (-4)$

   b) $(5a + 4b) \cdot (6x - 7y)$

   c) $7x \cdot (2a - 3b - 4c) \cdot 2y$

   d) $(4y+6x)\cdot(3a-5b)-(2y+3x)\cdot(2a+3b)$

   e) $(15xy+12bx)\cdot(a-c)-(5bx-10x)\cdot(a-c)$

   f) $2n\cdot(3x+z)-(9x+3z)\cdot(2n+3)-3x-z$

3. Fassen Sie geschickt zusammen:

   a) $23u - (14v - (8v + 6u - 3v - (43v - 16u)) - 16u)$

   b) $(3p - 2q)^2 - (3p + 2q)^2$

   c) $(2a + b - c)x + (c - 2a - b)y$

Zu den Lösungen: 8.2

5.3. Bruchrechnung

1. Fassen Sie die Brüche zu einem Bruch zusammen.

   a) $\frac{9}{4}\left(-\frac{8}{9} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\right)$

   b) $\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right)\right) \cdot \frac{14}{15}$

   c) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{25}\right) : \left(1 - \left(\frac{14}{50} - \frac{3}{100}\right)\right)$

   d) $\frac{7}{2} + \left(\left(\frac{3}{2} + \frac{15}{4}\right) : \frac{1}{16}\right)$

   e) $\frac{2}{3} : \left(\frac{4}{9} : \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} : \frac{9}{4}\right)\right)$

   f) $\frac{49}{5} - \left(\frac{9}{10} : \frac{3}{8}\right) : \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{12}{13} \cdot \frac{13}{12}\right)\right)$

2. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

   a) $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x^2+1} + C$
   (nach y auflösen)

   b) $\dfrac{u-v}{v-u}$

   c) $\dfrac{mt + ms - nt - ns}{mt - ms - nt + ns}$

   d) $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) : \dfrac{1}{abc}$

   e) $\dfrac{1}{x + \dfrac{1}{2x - \dfrac{2x^2}{1+x}}}$

Zu den Lösungen: 8.3

5.4. Potenz- und Wurzelrechnung, Logarithmen

1. Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

   a) $a^{m-n+1} \cdot a^{m+n-8}$

   b) $x^{3n-6} \cdot 3x^{n-3m+2} \cdot 5x^{2-n}$

   c) $\sqrt[4]{a^{n+4}} : \sqrt{a^{n-4}}$

   d) $\sqrt{\sqrt[3]{x^8}}$

   e) $\left(\dfrac{x^{-4}y^{-5}}{a^{-1}b^3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{x^3a^{-2}}{y^2b^2}\right)^{-3}$

   f) $\dfrac{45xa^3}{9yb^3} \cdot \dfrac{9y^n(a-1)^2}{30x^n(a+1)^2} : \dfrac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

2. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

   a) $16x + 19 = 5(4 + 3x)$

   b) $\dfrac{5}{2x} - \dfrac{3}{6x} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{x}$

   c) $5(2x + 3) - 12(6 - x) = 11(4x + 7)$

   d) $4x - 15(x - 1) = 2(6 - 3x)$

e) $\frac{12}{15x}+\frac{2}{3}=\frac{3}{5}+\frac{2}{3x}$ f) $\frac{x+1}{3}-\frac{2x+5}{6}=\frac{3-4x}{2}$

3. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

   a) $-5+10x^2+5x+(x+2)(1-11x)=-21x-3$

   b) $-2x^2+3x-3(-3x+7)=-6+(3-x)(-7+2x)$

4. Lösen Sie die Wurzelgleichungen nach x auf.

   a) $3\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x+207}$
   b) $\sqrt{x}=\sqrt{x+8}-2$
   c) $\sqrt{x-1}=x-7$
   d) $\sqrt{x+2}\sqrt{x+7}=6$
   e) $\sqrt{2x+\sqrt{4x-3}}=3$
   f) $3\sqrt{x+\sqrt{x-4}}=6$
   g) $\sqrt{4x+\sqrt{x+3}}=\sqrt{5x+1}$
   h) $\sqrt[4]{x+2}=\sqrt[8]{4x+8}$

5. Berechnen Sie:

   a) $\left((-2)^{-2}\right)^3$
   b) $\left((-2)^3\right)^{-2}$
   c) $(-2^3)^2$
   d) $(-2^3)^{-3}$
   e) $(-x^3)(-x^2)(-x)^4$
   f) $\frac{(-2x)^{-2m}}{-2x^{-2m+1}}$
   g) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

6. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

   a) $3^{x+1}=5$
   b) $5^{2x-1}=12$
   c) $5\cdot 3^{x+2}=72$
   d) $15\cdot e^{2x}=66$
   e) $1-e^{5x}=0{,}3$
   f) $5^{3x}=7^{2x}$
   g) $10^{7-x}=6^{2x+1}$
   h) $3^x\cdot 4^{x+1}=5^{x+2}$
   i) $\log_x 81=\frac{1}{4}$
   j) $\log_7 x=-2$
   k) $\log_2 x=-8$
   l) $80=16\cdot 4^x$
   m) $1000=0{,}5^x$
   n) $2^x=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}$
   o) $4^x=3{,}2$
   p) $2^{-x}=-2^x$

7. Vereinfachen Sie

   a) $5\,(a-b)^{2k-2}\,\frac{9}{5}(b-a)^{7-2k}\cdot\frac{2}{3}(b-a)^{2k-5}$
   mit $k\in\mathbb{Z}$
   b) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$
   c) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}$

8. Berechnen Sie, oder spalten Sie auf:

   a) $\log_a\frac{1}{a}$
   b) $\log_a a$
   c) $\log_a a^n$
   d) $\ln\left(\sqrt[4]{a^3}\right)$
   e) $\ln\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$
   f) $\ln e^e$
   g) $\ln\sqrt{e^e}$
   h) $\ln e^{\sqrt{e}}$
   i) $\ln\left(\frac{u-v}{e(v-u)}\right)^2$
   j) $\log_2 x=3$
   k) $\log_x 2197=3$

Zu den Lösungen: 8.4

5.5. Zahlen und Mengen

1. Ordnen Sie die folgende Zahlen zu passenden Grundmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$:

   $\sqrt{7},\ 12,\ -8,\ \pi,\ \frac{2}{3},\ 1{,}41$

2. Gegeben sind die drei Mengen $M_1 = \{a,b,c,d,e\}$, $M_2 = \{e,f,g,h,i\}$ und $M_3 = \{a,c,e,g,i\}$. Bilden Sie die Mengen $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_3$, $M_1 \cup M_3$, $M_2 \cap M_3$ und $M_2 \cup M_3$. Bestimmen Sie außerdem $M_1 \backslash M_2$, $M_2 \backslash M_1$, $M_2 \backslash M_3$ und $M_1 \cap M_2 \cap M_3$ sowie $M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

3. Gegeben seien die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 > x \geqslant 0\},$$
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 9\right\}, D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 1\right\}$$

   Bestimmen Sie jeweils die folgenden Mengen. Skizzieren Sie sich den Sachverhalt zunächst auf der Zahlengeraden, falls es Ihnen schwer fällt.

   a) $A \cup B$
   b) $A \backslash B$
   c) $A \cap B$
   d) $C \cap D$
   e) $(\mathbb{R} \backslash D) \cup B$
   f) $C \backslash (A \cap B)$
   g) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

4. Lösen Sie nach x auf und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

   a) $4x + 17 > -x - 3$
   b) $-4 \cdot (3x - 2) < 6 \cdot (1 - 2x)$

Zu den Lösungen: 8.5

5.6. Größen und Einheiten

1. Welche der folgenden Einheiten sind kohärent beziehungsweise inkohärent?

   a) Newton
   b) Kilonewton
   c) Millinewton
   d) Kilogramm
   e) Kilometer
   f) Nanosekunde

2. Rechnen Sie alle Längenangaben in Kilometer um.

   a) 12 m
   b) 3,4 m
   c) 0,5 m
   d) 100 mm
   e) 120 dm
   f) 150 mm
   g) 5000 m
   h) 200000 μm

3. Rechnen Sie alle Längenangaben in Millimeter um.

   a) 12 km
   b) 120 m
   c) 0,5 m
   d) 100 cm
   e) 50 km
   f) 500 m
   g) 800 m
   h) 400 cm

4. In der Seefahrt verwendet man die Längeneinheit Seemeile und die Geschwindigkeitseinheit Knoten. Dabei gilt 1 Seemeile = 1sm = 1852m und 1 Knoten = 1kn= 1 sm/h. Rechnen Sie die Geschwindigkeit 72 kn in die Einheiten km/h und m/s um.

5. Wie viele Minuten und Sekunden fehlen bei 7min 12 s zur vollen Stundenzahl?
6. Eine unermüdliche Schildkröte legt in zwei Wochen die Strecke 100,8 km zurück. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Schildkröte in km/h und in cm/s.
7. Auf einer Autokarte mit dem Maßstab 1: 250000 ist die Fahrstrecke 12.3 cm lang. Wie langebenötigt man für diese Stecke bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h?
8. Eine Spielzeugeisenbahn hat einen Maßstab von 1: 125.
   a) Welche Strecke muss die kleine Eisenbahn in der Stunde fahren, wenn dies einer wirklichen Geschwindigkeit von 80 km/h entsprechen soll?
   b) Welche Strecke fährt die kleine Eisenbahn in einer Minute und in fünf Minuten?
   c) Welche Strecke hätte der wirkliche Zug zurückgelegt, wenn der kleine Zug in 10 s 300 cm zurückgelegt hat?
   d) Welche Geschwindigkeit in km/h hätte der wirkliche Zug dann erreicht?
9. Flächenberechnung
   a) Die alte BRD hat eine Fläche von 248800 km^2 bei einer Einwohnerzahl von 61.6 Millionen. Berechnen Sie die Bevölkerungsdichte(Einwohnerzahl pro km^2)
   b) Kanada hat eine Fläche von 9976000 km^2 einer Einwohnerzahl von 24 Millionen. In welchem Verhältnis stehen die Bevölkerungsdichten der BRD und von Kanada?
   c) Wie oft passt die Fläche der BRD in die Fläche Kanadas?
10. Die Schallgeschwindigkeit beträgt rund 333 m/s. Welche Geschwindigkeit hat ein Flugzeug bei
    a) zweifacher Schallgeschwindigkeit in km/h und m/min?
    b) vierfacher Schallgeschwindigkeit in km/h und m/min?

Zu den Lösungen: 8.6

5.7. Dreisatz

1. Bei 12 Arbeitsstücken fallen 3,3kg Späne an. Wieviel kg Späne entstehen bei 100 Arbeitsstücken?
2. Ein Behälter enthält 450l Wasser und wird bei geöffnetem Hahn in 12 Minuten gefüllt. Wieviel Liter Wasser waren in dem Behälter nach 7 Minuten?
3. Ein Verkehrsflugzeug mit einer Geschwindigkeit von 850 km/h legt einen Weg in 55 Minuten zurück. Wieviel Zeit braucht ein neuerer Typ Flugzeug, der eine Geschwindigkeit von 950 km/h auf dieser Strecke erreicht.
4. Finden Sie den Fehler in den Berechnungen. Ein Auto kostet brutto 23800 Euro. Wie hoch ist der Nettopreis?

$$\begin{array}{rr} 100 & 23800 \\ :100 \downarrow & :100 \downarrow \\ 1 & 238 \\ \cdot 19 \downarrow & \cdot 19 \downarrow \\ 19 & 4522 \end{array}$$

Der Nettopreis beträgt 23800 Euro - 4522 Euro = 19278 Euro.

Zu den Lösungen: 8.7

5.8. Lineare Gleichungssysteme

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

1. $5x - 2y = 24$
   $x + 3y = -2$
2. $2x - 2y = 2$
   $-x + y = -2$
3. $y = 4x - 7$
   $-8x + 2y = -14$
4. $b + 3c = 10$
   $5a - 3b + c = 5$
   $-2b + 2c = -4$
5. $x + 2y + z = 9$
   $-2x - y + 5z = 5$
   $x - y + 3z = 4$
6. $4x + y + 7z = 12$
   $5x + 10z = 5$
   $-x - 2y = -2$
7. $x - y + z = -2$
   $4x + 2y + z = -5$
   $6x + 3z = -9$

Zu den Lösungen: 8.8

5.9. Für Geübte

1. Rechnen Sie im Kopf: fangen Sie mit der gegebenen Zahl an und folgen Sie den Rechenanweisungen von oben nach unten. Versuchen Sie geschickt zu rechnen. Der Schwierigkeitsgrad erhöht sich von rechts nach links. Wenn Sie gut geübt sind, sollten Sie pro Spalte höchstens eine Minute brauchen.

Einfach	**Mittel**	**Schwierig**
40	57	98
davon $\frac{1}{4}$	$\cdot 3$	+524
quadrieren	+211	$+\frac{1}{2}$ davon
+24	die Hälfte davon	: 3
: 4	−52	−243
$\cdot 2$	verdoppeln	$\cdot 5$
−30	+122	: 20
: 4	: 20	quadrieren
$\cdot 7$	$+\frac{3}{10}$ davon	+473
−22	: 13	$+\frac{2}{3}$ davon

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

   a) $\dfrac{9}{x-8} = x$

   b) $\dfrac{5}{x-2} - 3 = \dfrac{2x-4}{5}$

   c) $\dfrac{2x+1}{3} + \dfrac{10}{2x+1} = 4$

   d) $\dfrac{2x}{x-4} + \dfrac{3x}{x+4} = \dfrac{4(x^2-x+4)}{x^2-16}$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von p.
   $5 \cdot (3 + x) > p \cdot (1 - x) + 3 \cdot (x + 5)$

4. Ein Bauer möchte frisch geerntete Früchte trocknen. Insgesamt 100 Kilogramm hat er auf einer großen Decke ausgebreitet und lässt die Sonne ihre Werk verrichten. Zu Beginn lag

der Wasseranteil bei 99 Prozent.
Einige Tage später ist der Wasseranteil auf 98 Prozent gesunken. Wie schwer sind die Früchte dann - inklusive des in ihnen enthaltenen Wassers?

5. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

a) $-4x + 7y - 5z = 4$
$6x + 3z = -8$
$-4x - 8y - 6z = -8$

b) $2a + 6b - 3c = -6$
$4a + 3b + 3c = 6$
$4a - 3b + 9c = 18$

c) $2x - 3y - z = 4$
$x + 2y + 3z = 1$
$3x - 8y - 5z = 5$

Zu den Lösungen: 8.9

6. Funktionen

6.1. Lineare Funktionen

1. Bestimmen Sie aus den gegebenen Informationen den Funktionsterm $f(x) = ax + b$.

   a) $a = 3$ und der Punkt $P(2/16)$ liegt auf der Geraden.

   b) Die Gerade verläuft durch den Punkt $Q(-1/-2)$ und ist parallel zur Geraden mit der Gleichung $g(x) = -2x + 1$.

   c) Es ist $b = -1{,}5$ und $f(2{,}5) = 16$.

   d) Es ist $f(3) = 4$ und $f(-9) = 8$.

2. Ein Unternehmen fertigt Stühle an. Die Produktionskosten setzen sich aus Fixkosten (Miete, Maschinen,...) von 20000 Euro und variablen Kosten (Material, Arbeitszeit,...) für jeden einzelnen Stuhl von 30 Euro zusammen. Ein Stuhl wird für 80 Euro verkauft.

   a) Geben Sie den Gewinn (Einnahmen minus Kosten) als Funktion in Abhängigkeit der Anzahl der Stühle an.

   b) Wieviel Gewinn wird bei einem Verkauf von 3000 Stühlen gemacht?

   c) Bestimmen Sie die Anzahl der Stühle, ab der die Firma Gewinn macht.

Zu den Lösungen: 9.1

6.2. Quadratische Funktionen

1. Bestimmen Sie die Nullstellen und stellen Sie mithilfe der quadratischen Ergänzung den Funktionsterm $f(x)$ in der Scheitelform dar.

   a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ b) $f(x) = x^2 + 3x - 4$ c) $f(x) = -2x^2 + 4x - 8$

2. Die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat die Nullstellen -1 und 3. Bestimmen Sie jeweils die Parameter a, b und c, für die folgenden Werte von f der Stelle $x = 0$:

   a) $f(0) = 3$ b) $f(0) = -3$ c) $f(0) = -6$ d) $f(0) = 1{,}5$

Zu den Lösungen: 9.2

6.3. Ganzrationale Funktionen

1. Lösen Sie folgende Gleichungen für x. Machen Sie sich jeweils klar, für welche Funktion Sie damit die Nullstellen berechnet haben.

   a) $x^2 + x = 0$

   b) $(x-3)^2 = 16$

   c) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 = 0$

   d) $\frac{1-x}{1+x} = x$

   e) $a - (a-b)\,x = (b-a)\,x - (c+bx)$

   f) $\sqrt{2x^2-1} = -x$

2. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 6x^2 - 4{,}5x + 11$

d) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 4x + 12$

e) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 40$

f) $f(x) = 20x^3 - 120x^2 + 220x - 120$

Zu den Lösungen: 9.3

6.4. Winkelfunktionen

1. Geben Sie die Winkel im Bogenmaß als Vielfache von π an.

   a) 180°, 270°, 315°, 135°

   b) 2°, 10°, 100°, 60°

2. Geben Sie die Winkel im Gradmaß an.

   a) $3\pi,\ \frac{3}{10}\pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi$

   b) $\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{18},\ \frac{5}{18}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

3. Bestimmen Sie den exakten Funktionswert

   a) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$

   b) $\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$

   c) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$

   d) $\cos\left(-3\pi\right)$

4. Bestimmen Sie die Periode und die Amplitude von f. Geben Sie außerdem ohne Rechnung die Koordinaten je eines Hochpunktes H und eines Tiefpunktes T des Graphen von f an.

   a) $f(x) = 2\sin(2x)$

   b) $f(x) = \sin(\pi(x-1)) + 1$

   c) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1$

   d) $f(x) = -1{,}5\cos(x + \pi)$

5. Berechnen Sie.

   a) $\sin(2x) + 7 = 8,\ x \in [0; 2\pi]$

   b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1 = 0,\ x \in [0; 10]$

Zu den Lösungen: 9.4

6.5. Die Umkehrfunktion

1. Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$, die durch $f(x)$ definiert ist, sodass sie eindeutig umkehrbar ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion mit ihrem Definitionsbereich.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

   b) $f(x) = \dfrac{x+3}{5x-7}$

   c) $f(x) = \sqrt{2x+6}$

2. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion folgender Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, die jeweils durch $f(x)$ definiert sind. Hinweis: Hier gilt jeweils: $x > 0$.

   a) $f(x) = 3x^2 + x$

   b) $f(x) = (x^2+1)^{-1}$

   c) $f(x) = \sqrt{-2x}$

Zu den Lösungen: 9.5

6.6. Wurzelfunktionen

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

1. $f(x) = x^4 - 625$
2. $f(x) = 2x^3 + 0{,}25$
3. $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + 2$
4. $f(x) = (x-3)^5 + \frac{1}{32}$
5. $f(x) = \sqrt[3]{x} + 8$
6. $f(x) = \sqrt[5]{x-1} - 2$
7. $f(x) = x^{-1} - 5\sqrt{x^3}$

Zu den Lösungen: 9.6

6.7. Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen

1. Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen exakt.

   a) $f(x) = e^x - 5$

   b) $f(x) = -3e^x + 2$

   c) $f(x) = e^{-x} + 4$

   d) $f(x) = \frac{5}{2}e^{-2x} - \frac{5}{2}e$

2. Bestimmen Sie die Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot q^x$, deren Graph durch die Punkte $P = (0; 1{,}5)$ und $Q = (2; 6)$ verläuft.

3. Eine Nährlösung enthält zu Beginn des Versuchs 50000 Bakterien. Täglich vermehrt sich die Anzahl der Bakterien um 10%.

   a) Wie lautet die zugehörige Wachstumsfunktion?

   b) Wie viele Bakterien sind nach 5 Tagen in der Nährlösung?

   c) Bestimmen Sie die Verdopplungszeit.

   d) Wann hat sich die Zahl der Bakterien verzehnfacht?

Zu den Lösungen: 9.7

6.8. Symmetrieeigenschaften von Funktionen

Entscheiden Sie, welche Symmetrieeigenschaften folgende Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ haben:

1. $f(x) = x^3 - 5x$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = \sin(x)$
4. $f(x) = |x|$
5. $f(x) = \sin(x + \pi)$

Zu den Lösungen: 9.8

6.9. Translationen, Streckung und Stauchung

1. Führen Sie folgende Translationen und Verschiebungen an der Normalparabel durch:

   a) Verschiebung um 1 nach rechts

   b) Spiegelung an der x-Achse

   c) Streckung mit Faktor 2 in $y-$Richtung

   d) Verschiebung nach oben um 1

   Skizzieren Sie den Funktionsgraph! Berechnen Sie hierfür die Nullstellen. Geben Sie die Funktionsgleichung in üblicher Form an.

2. Verschieben Sie die Funktion $f(x) = 3e^{-5x} - 5$ so, dass der Graph bei $x = 0$ die x-Achse schneidet.

3. Strecken Sie die Funktion $f(x) = -e^{3x-3} - 2$ so, dass sie bei $x = 1$ den Wert 4 hat.

4. Geben Sie den Funktionsterm an den Sie erhalten, wenn Sie

   a) die Amplitude der Funktion $f(x) = \sin(x)$ verdoppeln und den Funktionsgraphen dann um 3 nach unten schieben.

   b) die Amplitude der Funktion $f(x) = \cos(x)$ auf ein Drittel verkleinern und die Periode vervierfachen.

   c) den Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ um 1 nach oben und um 4 nach links schieben.

Zu den Lösungen: 9.9

6.10. Kombination und Verkettung von Funktionen

1. Bestimmen Sie $(f \circ g)(x)$ und $(g \circ f)(x)$ und die Definitionsbereiche!

   a) $f(x) = 1 + x^2, \quad D_f = \mathbb{R} \quad$ und $\quad g(x) = \sqrt{x}, \quad D_g = [0; \infty)$

   b) $f(x) = (3 - x)^2, \quad D_f = \mathbb{R} \quad$ und $\quad g(x) = 3x + 1, \quad D_g = \mathbb{R}$

   c) $f(x) = -e^x, \quad D_f = \mathbb{R} \quad$ und $\quad g(x) = x^2 - 3, \quad D_g = \mathbb{R}$

2. Suchen Sie für die Funktion f eine mögliche Verkettung der Form $h \circ g$.

   a) $f(x) = \sin(x - 3)$

   b) $f(x) = (2x + 8)^3$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 7}$

   d) $f(x) = e^{2x}$

Zu den Lösungen: 9.10

6.11. Für Geübte

1. Ein Sportverein veranstaltet ein großes Schachturnier. Jeder spielt genau einmal gegen jeden anderen. Nach jeder Partie werden den Spielern Karten ausgehändigt. Der Sieger bekommt eine grüne, der Verlierer eine rote. Bei einem Remis erhalten beide Spieler je eine gelbe Karte.
   Nach dem Turnier stellt der Veranstalter fest, dass von jeder Farbe genau 752 Karten ausgegeben wurden. Wie viele Teilnehmer hatte das Turnier?

2. Bilden Sie aus den Bausteinen $x + 3$ und $x^2 - 4$ eine ganzrationale Funktion

   a) vom Grad 3 mit 3 einfachen Nullstellen,

   b) vom Grad 4 mit 2 doppelten Nullstellen,

   c) vom Grad 5 mit genau einer Nullstelle.

3. Berechnen Sie.

   a) $-2\cos(\pi(x - 1)) + 1 = 2, \ x \in [-2; 2]$

   b) $-2\cos(x + \pi) = \sqrt{3}, \ x \in [0; 2\pi]$

4. Bestimmen Sie die Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot q^x$, deren Graph durch die Punkte P(-2/50) und Q(3/0,512) verläuft.

5. Der Wirkstoff einer Schmerztablette wird im menschlichen Körper näherungsweise exponentiell abgebaut. Nimmt ein Patient eine Tablette, die 0,5g des Wirkstoffs enthält, so befinden sich nach 10 Stunden noch ca. 0,09g im Körper.

   a) Nach welcher Zeit ist die Hälfte (sind 90%) des Wirkstoffes abgebaut?

   b) Jemand nimmt um 9 Uhr eine Tablette und um 15 Uhr zwei weitere mit jeweils 0,5g des Wirkstoffes. Wie viel g sind davon um 20 Uhr desselben Tages noch im Körper vorhanden?

Zu den Lösungen: 9.11

7. Differenzial- und Integralrechnung

7.1. Differenzialrechnung

1. Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktionen

   a) $f(x) = 5x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 3$

   b) $f(x) = 2(3x^3 - 2x)$

   c) $f(x) = x^3 \cdot (2x^2 - 4)$

   d) $f(x) = 2x^3 \cdot 4x^2$

   e) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{4x^3}$

   f) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{2x}$

   g) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

   h) $f(x) = (x + 1)^7$

   i) $f(x) = (x^2 - 1)^{-3}$

2. Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

   a) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$

   b) $f(x) = (\sin x)^2$

   c) $f(x) = \cos x^2$

   d) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 3x}$

   e) $f(x) = x^3 \cdot \sin x$

   f) $f(x) = \dfrac{3x^2}{\cos x}$

Zu den Lösungen: 10.1

7.2. Anwendungen der Differenzialrechnung

1. Bilden Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $x_1 = 2$

   a) $f(x) = 2x^4$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   c) $f(x) = x^{-3}$

   d) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^3$

2. Bestimmen Sie die Extremstellen der folgenden Funktionen und entscheiden Sie, ob es sich jeweils um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum handelt.

   a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^2 - 2x - 3$

   b) $f(x) = e^x + e^{-x}$

   c) $f(x) = 2\sin(\pi x)$, $x \in [0; 2]$

Zu den Lösungen: 10.2

7.3. Integralrechnung

1. Berechnen Sie

$$\int f(x)\,dx$$

   für

   a) $f(x) = 2x^4$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^3$

d) $f(x) = 2x^4 + 4x^3 - 3x^2$

e) $f(x) = 5x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 3$

f) $f(x) = x^3 \cdot (2x^2 - 4)$

g) $f(x) = 2x^3 \cdot 4x^2$

h) $f(x) = (2x^2 + 3x)\left(4x^3\right)^{-1}$

i) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{2x}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

k) $f(x) = (x+1)^7$

l) $f(x) = \sqrt{x-4}$

m) $f(x) = \sin x$

n) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[5]{x}}$

o) $f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)^2$

2. Berechnen Sie

a) $\int_0^1 (x - x^2)\,dx$

b) $\int_1^4 2(3x^3 - 2x)dx$

c) $\int_{\frac{1}{5}}^5 x^{-4}dx$

3. Bestimmen Sie die Fläche unter dem Graphen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ mit

a) $f(x) = 4 - x^2$

b) $f(x) = e - e^x$

Zu den Lösungen: 10.3

7.4. Für Geübte

1. Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion möglichst kleinen Grades, für die gilt:
   a) Die Funktion hat bei H=(0;1) einen Hochpunkt.
   b) Der Graph der Funktion schneidet bei $x = 2$ die x-Achse.
   c) Bei $x = 1$ befindet sich eine Wendestelle.
2. Welche Funktion $f(x) = a \cdot \sin(\pi \cdot x) + b$ hat für $x = 2$ die Steigung 3π und den Wert 4?
3. Bestimmen Sie a, b und k für $f(x) = a \cdot e^{kx} + b$ unter folgenden Bedingungen:
   a) Die Asymptote des Funktionsgraphen besitzt die Gleichung $y = 3$.
   b) Der Graph der Funktion schneidet bei -2 die y-Achse.
   c) Die Tangente an der Stelle $x = 0$ hat die Steigung $5 \cdot \ln(2)$.

Zu den Lösungen: 10.4

Vektorrechnung

7.5. Geometrie

Berechnen Sie das Volumen sowie die Oberfläche

1. des Quaders mit den Kantenlängen: L= 100 m; B= 100 cm; H= 50 mm.
2. des Zylinders mit Durchmesser: D= 5 km und Höhe H= 500 mm.

Zu den Lösungen: 11.1

7.6. Rechnen mit Vektoren

1. Bei einem geraden dreiseitigen Prisma ABCDEF sind A, B und C die Ecken der Grundfläche. Die Höhe des Prismas beträgt 5. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte D, E und F für
   a) A=(2;0;3), B=(1;0;7), C=(-7;0;3)
   b) A=(2;0;3), B=(6;2;3), C=(3;3;3)
   c) Welche besondere Lage im Koordinatensystem haben die Punkte A,B und C?
2. Berechnen Sie mit folgenden Vektoren und Skalaren:
   $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, k = 5, l = -2$$
   a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w},\ \vec{u} - \vec{v} - \vec{w},\ \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$
   b) $l\vec{w},\ k\vec{u} + l\vec{v},\ k\vec{v} - l\vec{v}$
   c) a, b, so dass $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$ gilt. Was sagt Ihnen das Ergebnis?
   d) Die Länge aller drei Vektoren.
3. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Strecke AB mithilfe von Vektoren.
   a) A=(3;2;5), B=(5;2;3) b) A=(2;1;-2), B=(-5;1;9) c) A=(0;0;2), B=(-2;0;0)
4. In einem Dreieck ABC sind die Punkte M_A, M_B und M_C die Mittelpunkte der Dreiecksseiten, die den jeweiligen Eckpunkten gegenüber liegen. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte M_A, M_B und M_C sowie die Summe der Vektoren $\overrightarrow{AM_A}$, $\overrightarrow{BM_B}$ und $\overrightarrow{CM_C}$.
   a) A=(0;0), B=(3;1), C=(1;3) b) A=(0;0;0), B=(3;1;2), C=(1;3;4)
5. Gegeben sind die Punkte P=(1;3;5) und Q=(2;-1;7).
   a) Geben Sie mindestens 2 veschiedene Gleichungen für die Gerade durch P und Q an.
   b) Prüfen Sie, ob der Punkt R=(2;-5;9) auf der Geraden liegt.
6. Gegeben sind die Punkte A=(7;5;4), B=(-5;8;7) und C=(-1;1;3).

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

b) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks.

7. Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.
$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R},\ h : \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\3\\-3\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$

8. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h.
$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R},\ h : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$

9. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}$.

   a) Berechnen Sie die Vektorprodukte $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ und $\vec{b} \times \vec{c}$.

   b) Bestimmen Sie jeweils den Flächeninhalt der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a}$ und $\vec{c}$ beziehungsweise $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramme.

   c) Bestimmen Sie den Winkel, den $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen. Benutzen Sie dazu das Skalarprodukt. Überprüfen Sie anschließend mit Hilfe des Vektorprodukts Ihr Ergebnis. Berechnen Sie analog den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$, sowie zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Zu den Lösungen: 11.2

7.7. Für Geübte

Die geradlinigen Flugbahnen zweier Flugzeuge F_1 und F_2 können mithilfe eines Koordinatensystems angegeben werden. Die Flugbahn von F_1 ist durch die Punkte P=(2;3;1) und Q=(0;0;1,05) und die Flugbahn F_2 ist durch R=(-2;3;0,05) und T=(2;-3;0,07) festgelegt. Die Koordinaten geben die Entfernungen zum Koordinatenursprung in Kilometern an. Es ist windstill. F_1 fliegt mit der Geschwindigkeit 350 km/h und F_2 mit der Geschwindigkeit 250 km/h relativ zu Luft. F_1 befindet sich am Punkt P und F_2 befindet sich zeitgleich am Punkt R. Betrachten wir die Situation 20 Minuten später.

1. Wo befinden sich die beiden Flugzeuge? In welcher Höhe befinden sie sich?

2. Wie weit sind die Flugzeuge voneinander entfernt?

Zu den Lösungen: 11.3

Teil III.

Lösungen

8. Grundlagen

8.1. Rechentraining

1. Schreiben Sie als Potenzen und berechnen Sie den Wert der Potenz: **Lösung:**

   a) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5 = 100\,000$

   b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$

   c) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1^5 = 1$

   d) $12 \cdot 12 = 12^2 = 144$

   e) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$

   f) $25 \cdot 25 \cdot 25 = 25^3 = 15\,625$

   g) $100 \cdot 100 \cdot 100 = 100^3 = 1\,000\,000$

2. Berechnen Sie und kürzen Sie vollständig: **Lösung:**

   a) $\frac{65}{91} = \frac{5}{7}$

   b) $\frac{52}{78} = \frac{2}{3}$

   c) $\frac{88}{99} = \frac{8}{9}$

   d) $\frac{3}{10} + \frac{4}{7} = \frac{21}{70} + \frac{40}{70} = \frac{61}{70}$

   e) $\frac{5}{18} + \frac{7}{30} = \frac{25}{90} + \frac{21}{90} = \frac{46}{90} = \frac{23}{45}$

   f) $\frac{7}{10} + \frac{6}{45} = \frac{7}{10} + \frac{2}{15} = \frac{21}{30} + \frac{4}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

3. Schreiben Sie als Summe einer ganzen Zahl und eines echten Bruchs: **Lösung:**

   a) $\frac{193}{9} = \frac{189}{9} + \frac{4}{9} = 21 + \frac{4}{9}$ Achtung: Schreiben Sie für $21 + \frac{4}{9}$ niemals $21\frac{4}{9}$. Das ist unter Umständen nicht zu unterscheiden von: $21 \cdot \frac{4}{9} = \frac{84}{9}$

   b) $\frac{432}{25} = 17 + \frac{7}{25}$

   c) $\frac{647}{120} = 5 + \frac{47}{120}$ Woran erkennen Sie, dass sich $\frac{47}{120}$ nicht weiter kürzen lässt?

4. Beantworten Sie folgende Fragen:

   a) Welche Zahl müssen Sie durch $\frac{7}{8}$ dividieren, um $\frac{4}{5}$ zu erhalten?
   Lösung: $x : \frac{7}{8} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$

   b) Durch welche Zahl müssen Sie $\frac{3}{7}$ dividieren, um $\frac{9}{14}$ zu erhalten?
   Lösung: $\frac{3}{7} : x = \frac{9}{14} \Rightarrow x = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} = \frac{2}{3}$

5. Geben Sie die Lösung für x als gekürzten Bruch, Dezimalzahl und Prozentzahl an:

   a) $4x = 9$ **Lösung:** $x = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \cdot \frac{25}{25} = \frac{225}{100} = 2{,}25 = 225\%$

   b) $15x = 10$ **Lösung:** $x = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0,\bar{6} = 66,\bar{6}\%$

   c) $48x = 18$ **Lösung:** $x = \frac{18}{48} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$

6. Berechnen Sie: **Lösung:**

   a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{3^2 \cdot 4^3}{4^2 \cdot 5^3} = \frac{3^2 \cdot 4}{5^3} = \frac{36}{125}$

   b) $\left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{3^4 \cdot 1^3}{2^2 \cdot 3^3} = \frac{3}{4}$

7. Dividieren Sie schriftlich, schreiben Sie etwaige Reste als additiven Bruch:

   a) 10775 : 25 **Lösung:**

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 7 & 7 & 5 & :25 & = 431 \\ - & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & & & 7 & 7 & & & \\ & & - & 7 & 5 & & & \\ & & & & 2 & 5 & & \\ & & & - & 2 & 5 & & \\ & & & & & 0 & & \end{array}$$

   b) 12345 : 23 **Lösung:**

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & :23 & = 536 + \frac{17}{23} \\ - & 1 & 1 & 5 & & & & \\ & & & 8 & 4 & & & \\ & & - & 6 & 9 & & & \\ & & & 1 & 5 & 5 & & \\ & & - & 1 & 3 & 8 & & \\ & & & & 1 & 7 & & \end{array}$$

   c) 4601553 : 451 **Lösung:** 10203

8. Dividieren Sie im Kopf (nach dem gleichen Prinzip, wie in der vorigen Aufgabe): **Lösung:**

   a) $\dfrac{1}{99} = 0,\overline{01}$

   b) $\dfrac{15}{14} = 1{,}0\overline{714285}$

9. Lösen Sie folgende Gleichungen für x:

   a) $354 \cdot 13 - x = 756 : 18$ **Lösung:** $x = 4560$

   b) $421 \cdot x - (97 + 48) \cdot x = (15 \cdot (94 - 79) + 63) \cdot 23$
   Lösung: Wenn man die Form $276x = 288 \cdot 23$ erreicht hat, sollte man zunächst erkennen, dass die Division durch 23 hilft. Danach teilt man noch durch 12 und erhält: $x = 24$

   c) $\frac{8}{25} \cdot x = 10\,dm^2$ (x als Dezimalzahl in cm^2 angeben) **Lösung:** $x = 3125\,cm^2$

10. Beantworten Sie folgende Fragen:

    a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit fährt ein ICE, der für 153 km genau 45 $Minuten$ benötigt? **Lösung:** 204 $\frac{km}{h}$

    b) Herr Hurtig lässt den 45-Liter-Tank seines Autos volltanken. Der Tankwart gibt 33,5 Euro auf 100 Euro heraus. Wieviel Benzin war vor dem Tanken noch im Tank, wenn ein Liter Benzin 1,75 Euro kostet? **Lösung:** $7\,\ell$

    c) Wieviele Schnittpunkte haben drei nicht identische, nicht parallele Geraden im Raum maximal? Wieviele sind es minimal? **Lösung:** Max.: 3 Min.: 0

11. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Quaders mit den Kantenlängen: $45\,dm$, $4\,m$, $125\,cm$. **Lösung:**
    Volumen: $V = 450 \cdot 400 \cdot 125\,cm^3 = 450 \cdot 50\,000\,cm^3 = 22\,500\,000\,cm^3 = 22{,}5\,m^3$
    Oberfläche: $O = 2 \cdot (4{,}5 \cdot 4 + 4 \cdot 1{,}25 + 4{,}5 \cdot 1{,}25)\ m^2 = 2 \cdot 28{,}625\,m^2 = 57{,}25\,m^2$

12. Zerlegen Sie in Primfaktoren: **Lösung:**

    a) $425 = 5 \cdot 5 \cdot 17$ b) $248 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 31$ c) $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$ d) $225 = 3^2 \cdot 5^2$

13. Ordnen Sie die Brüche der Größe nach (Rechnen Sie nicht, sondern vergleichen Sie.):

    a) $\dfrac{4}{9}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{4}{11}$ **Lösung:** $\dfrac{4}{11} < \dfrac{4}{9} < \dfrac{4}{7}$ Hinweis: Gleiche Zähler.

b) $\frac{7}{15}, \frac{14}{17}$ **Lösung:** $\frac{7}{15} < \frac{14}{17}$

c) $\frac{14}{25}, \frac{31}{20}, \frac{4}{15}$ **Lösung:** $\frac{4}{15} < \frac{14}{25} < \frac{31}{20}$ Hinweis: *Deutlich weniger als 0,5* ist weniger als *etwas mehr als 0,5* und das ist weniger als *etwas mehr als 1,5*

14. Schreiben Sie folgende Zahlen als vollständig gekürzte Brüche: **Lösung:**

a) $0{,}125 = \frac{1}{8}$ b) $1{,}375 = \frac{11}{8}$ c) $1{,}75 = \frac{7}{4}$ d) $2{,}625 = \frac{21}{8}$ e) $1{,}875 = \frac{15}{8}$

15. Berechnen Sie: **Lösung:**

a) $\frac{\left(15 \cdot \frac{3}{20} + \frac{48}{55}\left(3 + \frac{7}{16}\right)\right) : \left(3 + \frac{1}{2}\right)}{\left(1 + \frac{9}{10}\right) : \left(1 + \frac{13}{25}\right) + \frac{3}{4} : 2} = \frac{12}{13}$ b) $\frac{\left(2 + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(1 + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}}{\left(4 + \frac{2}{5}\right)\frac{5}{12} + 2 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

16. Berechnen Sie: **Lösung:**

a) $2{,}74 \cdot 1{,}08 = 2{,}9592$

b) $6{,}55 \cdot 1{,}58 = 10{,}349$

c) $\frac{40{,}11}{7} = 5{,}73$

d) $30 : 6{,}4 = 4{,}6875$

e) $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$

Zurück zur Theorie: 1.1

8.2. Rechenoperationen und Termumformungen

1. Schreiben Sie die Terme ohne Klammern und vereinfachen Sie soweit es geht.

a) $x^2(x^3 - 2x) - x^5$ **Lösung:** $x^5 - 2x^3 - x^5 = -2x^3$

b) $x(x-1) - x^2$ **Lösung:** $x^2 - x - x^2 = -x$

c) $(3x+2)^2$ **Lösung:** $9x^2 + 12x + 4$

d) $3x(2-3x)$ **Lösung:** $6x - 9x^2$

e) $x + 1 - 2(x-1)$ **Lösung:** $x + 1 - 2x + 2 = 3 - x$

f) $2(x^2-1) - x^2$ **Lösung:** $2x^2 - 2 - x^2 = x^2 - 2$

g) $1 - (1-3x)^2$ **Lösung:** $1 - (1 - 6x + 9x^2) = 6x - 9x^2$

h) $2x^2(2x^2+1)$ **Lösung:** $4x^4 + 2x^2$

i) $2(x+1) - 3(x+2)$ **Lösung:** $2x + 2 - 3x - 6 = -x - 4$

j) $(x - x^3)x^2$ **Lösung:** $x^3 - x^5$

2. Schreiben Sie folgende Terme ohne Klammern und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $(9 + 4x - a) \cdot (-4)$ **Lösung:** $-36 - 16x + 4a$

b) $(5a + 4b) \cdot (6x - 7y)$ **Lösung:** $30ax - 35ay + 24bx - 28by$

c) $7x \cdot (2a - 3b - 4c) \cdot 2y$ **Lösung:** $28axy - 42bxy - 56cxy$

d) $(4y + 6x) \cdot (3a - 5b) - (2y + 3x) \cdot (2a + 3b)$ **Lösung:** $8ay - 26by + 12ax - 39bx$

e) $(15xy + 12bx) \cdot (a - c) - (5bx - 10x) \cdot (a - c)$
Lösung: $15axy - 15cxy + 7abx - 7bcx + 10ax - 10cx$

f) $2n \cdot (3x + z) - (9x + 3z) \cdot (2n + 3) - 3x - z$ **Lösung:** $-12nx - 4nz - 30x - 10z$

3. Fassen Sie geschickt zusammen: **Lösung:**

a) $23u - (14v - (8v + 6u - 3v - (43v - 16u)) - 16u) = 23u - (14v - (22u - 38v) - 16u) = 23u - 52v + 38u = 61u - 52v$

b) $(3p - 2q)^2 - (3p + 2q)^2 = -24pq$ mit $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -2ab - 2ab = -4ab$

c) $(2a + b - c)x + (c - 2a - b)y = (2a + b - c)(x - y)$

Zurück zur Theorie: 1.3

8.3. Bruchrechnung

1. Fassen Sie die Brüche zu einem Bruch zusammen.

a) $\frac{9}{4}\left(-\frac{8}{9} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\right)$ **Lösung:** $\frac{9}{4} \cdot \left(-\frac{16}{18} - \frac{6}{18} - \frac{3}{18}\right) = \frac{9}{4} \cdot \left(-\frac{25}{18}\right) = -\frac{25}{8}$

b) $\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right)\right) \cdot \frac{14}{15}$ **Lösung:** $\frac{14}{15} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{7}{14} + \frac{2}{14}\right)\right) = \frac{14}{15} \cdot \left(1 - \frac{9}{14}\right) = \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{3}$

c) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{25}\right) : \left(1 - \left(\frac{14}{50} - \frac{3}{100}\right)\right)$ **Lösung:** $\left(\frac{15-1}{25}\right) : \left(\frac{100-28+3}{100}\right) = \frac{14}{25} \cdot \frac{100}{75} = \frac{56}{75}$

d) $\frac{7}{2} + \left(\left(\frac{3}{2} + \frac{15}{4}\right) : \frac{1}{16}\right)$ **Lösung:** $\frac{7}{2} + ((\frac{6}{4} + \frac{15}{4}) \cdot 16) = \frac{7}{2} + (\frac{21}{4} \cdot 16) = \frac{7}{2} + 84 = \frac{175}{2}$

e) $\frac{2}{3} : \left(\frac{4}{9} : \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} : \frac{9}{4}\right)\right)$ **Lösung:** $\frac{2}{3} : \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\right) = \frac{2}{3} : \left(\frac{8}{27} + \frac{1}{2} - \frac{8}{27}\right) = \frac{4}{3}$

f) $\frac{49}{5} - \left(\frac{9}{10} : \frac{3}{8}\right) : \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{12}{13} \cdot \frac{13}{12}\right)\right)$ **Lösung:** $\frac{49}{5} - \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{3}\right) \cdot 4 = \frac{49}{5} - \frac{48}{5} = \frac{1}{5}$

2. Vereinfachen Sie so weit wie möglich: **Lösung:**

a)
$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2+1} + C \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1 + C(x^2+1)}{x^2+1} \Rightarrow y = \frac{x^2+1}{1 + C(x^2+1)}$$

b)
$$\frac{u-v}{v-u} = \frac{-(v-u)}{(v-u)} = -1$$

c)
$$\frac{mt + ms - nt - ns}{mt - ms - nt + ns} = \frac{m(t+s) - n(t+s)}{m(t-s) - n(t-s)} = \frac{(m-n)(t+s)}{(m-n)(t-s)} = \frac{(t+s)}{(t-s)}$$

d)
$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) : \frac{1}{abc} \Rightarrow \frac{bc + ac + ab}{abc} \cdot abc = bc + ac + ab$$

e)
$$\frac{1}{x + \frac{1}{2x - \frac{2x^2}{1+x}}} = \frac{1}{x + \frac{1}{\frac{2x(1+x) - 2x^2}{1+x}}} = \frac{1}{x + \frac{1+x}{2x}} = \frac{1}{\frac{2x^2 + 1 + x}{2x}} = \frac{2x}{2x^2 + x + 1}$$

Zurück zur Theorie: 1.4

8.4. Potenz- und Wurzelrechnung, Logarithmen

1. Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

   a) $a^{m-n+1} \cdot a^{m+n-8}$ **Lösung:** $a^{m-n+1+m+n-8} = a^{2m-7}$

   b) $x^{3n-6} \cdot 3x^{n-3m+2} \cdot 5x^{2-n}$ **Lösung:** $15x^{3n-6+n-3m+2+2-n} = 15x^{3n-2-3m}$

   c) $\sqrt[4]{a^{n+4}} : \sqrt{a^{n-4}}$ **Lösung:** $\dfrac{(a^{n+4})^{0,25}}{(a^{n-4})^{0,5}} = \dfrac{a^{0,25n+1}}{a^{0,5n-2}} = a^{0,25n+1-0,5n+2} = a^{3-0,25n}$

   d) $\sqrt{\sqrt[3]{x^8}}$ **Lösung:** $\left((x^8)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{8}{6}} = x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}$

   e) $\left(\dfrac{x^{-4}y^{-5}}{a^{-1}b^3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{x^3a^{-2}}{y^2b^2}\right)^{-3}$ **Lösung:**

$$\left(\frac{a}{x^4y^5b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^3}{y^2b^2a^2}\right)^{-3} = \frac{\frac{a^2}{x^8y^{10}b^6}}{\frac{x^9}{y^6b^6a^6}} = \frac{a^2}{x^8y^{10}b^6} \cdot \frac{y^6b^6a^6}{x^9} = \frac{a^8}{y^4x^{17}}$$

   f) $\dfrac{45xa^3}{9yb^3} \cdot \dfrac{9y^n(a-1)^2}{30x^n(a+1)^2} : \dfrac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$ **Lösung:**

$$\frac{3xa^3y^n(a-1)^2}{2yb^3x^n(a+1)^2} : \frac{3y^{n-1}(1-a)^3}{8x^{n+1}(1+a)^2} = \frac{3xa^3y^n(a-1)^2}{2yb^3x^n(a+1)^2} \cdot \frac{8x^{n+1}(1+a)^2}{3y^{n-1}(1-a)^3}$$
$$= \frac{4a^3 \cdot xy^nx^{n+1}}{b^3(1-a) \cdot yx^ny^{n-1}} = \frac{4a^3 \cdot x^2}{b^3(1-a)} = \frac{4a^3x^2}{b^3 - ab^3}$$

2. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

   a) $16x + 19 = 5(4 + 3x)$ **Lösung:** $16x + 19 = 20 + 15x \Rightarrow x = 1$

   b) $\dfrac{5}{2x} - \dfrac{3}{6x} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{x}$ **Lösung:**
   $\dfrac{15-3}{6x} = \dfrac{x-9}{3x} \Rightarrow \dfrac{12}{6x} = \dfrac{2x-18}{6x} \Leftrightarrow 12 = 2x - 18 \Leftrightarrow x = 15$

   c) $5(2x+3) - 12(6-x) = 11(4x+7)$ **Lösung:**
   $10x + 15 - 72 + 12x = 44x + 77 \Rightarrow 22x = -134 \Rightarrow x = -\frac{134}{22} = -\frac{67}{11}$

   d) $4x - 15(x-1) = 2(6-3x)$ **Lösung:** $4x - 15x + 15 = 12 - 6x \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$

   e) $\dfrac{12}{15x} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3x}$ **Lösung:** $\dfrac{12+10x}{15x} = \dfrac{9x+10}{15x} \Rightarrow 12 + 10x = 9x + 10 \Rightarrow x = -2$

   f) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{2x+5}{6} = \dfrac{3-4x}{2}$ **Lösung:**
   $\dfrac{2x+2-2x-5}{6} = \dfrac{9-12x}{6} \Rightarrow -3 = 9 - 12x \Rightarrow 12x = 12 \Rightarrow x = 1$

3. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

   a) $-5 + 10x^2 + 5x + (x+2)(1-11x) = -21x - 3$ **Lösung:**
   $-5 + 10x^2 + 5x + (x - 11x^2 + 2 - 22x) = -21x - 3 \Rightarrow -3 - x^2 - 16x = -21x - 3$
   $\Rightarrow 0 = x^2 - 5x = x(x-5) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5$

b) $-2x^2 + 3x - 3(-3x + 7) = -6 + (3 - x)(-7 + 2x)$ **Lösung:**
$-2x^2 + 3x + 9x - 21 = -6 - 21 + 6x + 7x - 2x^2 \Rightarrow -2x^2 + 12x - 21 = -2x^2 + 13x - 27$
$\Rightarrow x = 6$

4. Lösen Sie die Wurzelgleichungen nach x auf. **Lösung:**

   a) $3\sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x+207} \Rightarrow 27(x-1) = x + 207 \Rightarrow 27x - 27 = x + 207 \Rightarrow 26x = 234 \Rightarrow$
   $x = 9$

   b) $\sqrt{x} = \sqrt{x+8} - 2 \Rightarrow x = (x+8) - 4\sqrt{x+8} + 4 \Rightarrow -12 = -4\sqrt{x+8} \Rightarrow 3 = \sqrt{x+8} \Rightarrow$
   $9 = x + 8 \Rightarrow x = 1$

   c) $\sqrt{x-1} = x - 7 \Rightarrow x - 1 = x^2 - 14x + 49 \Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0$
   $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225-200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 10, x_2 = 5$
   Probe mit der Ausgangsgleichung ergibt: x_2 entfällt!

   d) $\sqrt{x+2}\sqrt{x+7} = 6 \Rightarrow (x+2)(x+7) = 36 \Rightarrow x^2 + 7x + 2x + 14 = 36$
   $\Rightarrow x^2 + 9x - 22 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+88}}{2} = \frac{-9 \pm 13}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -11$
   Probe mit der Ausgangsgleichung ergibt: x_2 entfällt!

   e) $\sqrt{2x + \sqrt{4x-3}} = 3 \Rightarrow 2x + \sqrt{4x-3} = 9 \Rightarrow \sqrt{4x-3} = 9 - 2x \Rightarrow$
   $4x - 3 = 81 - 36x + 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 40x + 84 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$
   $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 7, x_2 = 3$
   Probe mit der Ausgangsgleichung ergibt: x_1 entfällt!

   f) $3\sqrt{x + \sqrt{x-4}} = 6 \Rightarrow \sqrt{x + \sqrt{x-4}} = 2 \Rightarrow x + \sqrt{x-4} = 4 \Rightarrow \sqrt{x-4} = -x + 4 \Rightarrow$
   $x - 4 = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow$
   $x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$
   $\Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 4$ Probe mit der Ausgangsgleichung ergibt: x_1 entfällt!

   g) $\sqrt{4x + \sqrt{x+3}} = \sqrt{5x+1} \Rightarrow 4x + \sqrt{x+3} = 5x + 1 \Rightarrow \sqrt{x+3} = x + 1$
   $\Rightarrow x + 3 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$
   $\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$ Probe mit der Ausgangsgleichung ergibt: x_1 entfällt!

   h) $\sqrt[4]{x+2} = \sqrt[8]{4x+8} \Rightarrow x + 2 = \sqrt{4x+8} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 4x + 8 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$
   $x_1 = 2, x_2 = -2$

5. Berechnen Sie: **Lösung:**

   a) $\left((-2)^{-2}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

   b) $\left((-2)^3\right)^{-2} = (-2)^{-6} = \frac{1}{64}$

   c) $(-2^3)^2 = (-8)^2 = 64$

   d) $(-2^3)^{-3} = -\frac{1}{512}$

   e) $(-x^3)(-x^2)(-x)^4 = (-1)(-1)(+1)x^{(3+2+4)} = x^9$

   f) $\dfrac{(-2x)^{-2m}}{-2x^{-2m+1}} = \dfrac{(-2)^{-2m}x^{-2m}}{-2 \cdot x^{-2m} \cdot x} = \dfrac{2^{-2m}}{-2 \cdot x} = -\dfrac{1}{2^{2m+1} \cdot x}$

   g) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3} = \dfrac{(x-1)^2}{x^3}$

6. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

   a) $3^{x+1} = 5$ **Lösung:** $\ln\left(3^{x+1}\right) = \ln 5 \Rightarrow x + 1 = \frac{\ln 5}{\ln 3} \Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 3} - 1$

b) $5^{2x-1} = 12$ **Lösung:** $\ln\left(5^{2x-1}\right) = \ln 12 \Rightarrow 2x - 1 = \frac{\ln 12}{\ln 5} \Rightarrow x = (\frac{\ln 12}{\ln 5} + 1) \cdot \frac{1}{2}$

c) $5 \cdot 3^{x+2} = 72$ **Lösung:**

$$\ln\left(3^{x+2}\right) = \ln\left(\frac{72}{5}\right) \Rightarrow (x+2)\ln 3 = \ln 72 - \ln 5$$
$$\Rightarrow x + 2 = \frac{\ln 72 - \ln 5}{\ln 3} \Rightarrow x = \frac{\ln 72 - \ln 5}{\ln 3} - 2$$

d) $15 \cdot e^{2x} = 66$
Lösung: $\ln e^{2x} = \ln\left(\frac{66}{15}\right) \Rightarrow 2x = \ln\left(\frac{22}{5}\right) \Rightarrow 2x = \ln 22 - \ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 22 - \ln 5}{2}$

e) $1 - e^{5x} = 0{,}3$
Lösung: $e^{5x} = 0{,}7 \Rightarrow \ln e^{5x} = \ln 0{,}7 \Rightarrow 5x = \ln 0{,}7 \Rightarrow x = \frac{\ln 0{,}7}{5}$

f) $5^{3x} = 7^{2x}$ **Lösung:** $\ln 5^{3x} = \ln 7^{2x} \Rightarrow 3x \cdot \ln 5 = 2x \cdot \ln 7 \Rightarrow x = 0$

g) $10^{7-x} = 6^{2x+1}$ **Lösung:**

$$\ln 10^{7-x} = \ln 6^{2x+1} \Rightarrow (7-x)\ln 10 = (2x+1)\ln 6$$
$$\Rightarrow 7\ln 10 - x\ln 10 = 2x\ln 6 + \ln 6 \Rightarrow 7\ln 10 - \ln 6 = 2x\ln 6 + x\ln 10$$
$$\Rightarrow 7\ln 10 - \ln 6 = x\,(2\ln 6 + \ln 10) \Rightarrow x = \frac{7\ln 10 - \ln 6}{2\ln 6 + \ln 10}$$

h) $3^x \cdot 4^{x+1} = 5^{x+2}$ **Lösung:**

$$\ln\left(3^x \cdot 4^{x+1}\right) = \ln\left(5^{x+2}\right) \Rightarrow x\ln 3 + (x+1)\ln 4 = (x+2)\ln 5$$
$$\Rightarrow x\ln 3 + x\ln 4 + \ln 4 = x\ln 5 + 2\ln 5 \Rightarrow x\ln 3 + x\ln 4 - x\ln 5 = 2\ln 5 - \ln 4$$
$$\Rightarrow x\,(\ln 3 + \ln 4 - \ln 5) = 2\ln 5 - \ln 4 \Rightarrow x = \frac{2\ln 5 - \ln 4}{\ln 3 + \ln 4 - \ln 5}$$

i) $\log_x 81 = \frac{1}{4}$ **Lösung:** $x^{\frac{1}{4}} = 81 \Rightarrow x = 81^4$

j) $\log_7 x = -2$ **Lösung:** $x = 7^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{7^2} \Rightarrow x = \frac{1}{49}$

k) $\log_2 x = -8$ **Lösung:** $x = 2^{-8} \Rightarrow x = \frac{1}{2^8} \Rightarrow x = \frac{1}{256}$

l) $80 = 16 \cdot 4^x$ **Lösung:** $4^x = 5 \Rightarrow x = \log_4 5 = \frac{\ln 5}{\ln 4}$

m) $1000 = 0{,}5^x$ **Lösung:** $x = \log_{0{,}5} 1000 = \frac{\ln 1000}{\ln 0{,}5}$

n) $2^x = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}$ **Lösung:** $2^x = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow 2^x = 2^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

o) $4^x = 3{,}2$ **Lösung:** $x = \log_4 3{,}2 = \frac{\ln 3{,}2}{\ln 4}$

p) $2^{-x} = -2^x$ **Lösung:** $2^{-x} = -2^x \Rightarrow \frac{1}{2^x} \neq -2^x \forall x \in \mathbb{R}$ Das heißt, die Gleichung ist nicht lösbar!

7. Vereinfachen Sie **Lösung:**

a) Da $2k-2$ gerade ist, ist $(a-b)^{2k-2} = (b-a)^{2k-2}$. Also

$$5(b-a)^{2k-2} \cdot \frac{9}{5}(b-a)^{7-2k} \cdot \frac{2}{3}(b-a)^{2k-5} = 6(b-a)^{2k} = 6(a-b)^{2k}$$

b)

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=2\sqrt{b}$$

c)

$$\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}=\left(\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{8}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{8}}$$

8. Berechnen Sie, oder spalten Sie auf: **Lösung:**

   a) $\log_a \frac{1}{a} = \log_a a^{-1} = -1$

   b) $\log_a a = 1$

   c) $\log_a a^n = n$

   d) $\ln\left(\sqrt[4]{a^3}\right) = \ln\left(a^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4}\ln a$

   e) $\ln\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \ln(x^2-y^2) - \ln(x^2+y^2) = \ln((x-y)(x+y)) - \ln(x^2+y^2)$
   $= \ln(x-y) + \ln(x+y) - \ln(x^2+y^2)$

   f) $\ln e^e = e$

   g) $\ln \sqrt{e}^e = \ln e^{\frac{e}{2}} = \frac{e}{2}$

   h) $\ln e^{\sqrt{e}} = \sqrt{e}$

   i) $\ln\left(\frac{u-v}{e(v-u)}\right)^2 = \ln\left(\left(\frac{1}{e^2}\right)\frac{(u-v)^2}{(v-u)^2}\right) = \ln\left(e^{-2}\cdot 1\right) = -2$

   j) $\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$

   k) $\log_x 2197 = 3 \Rightarrow 2197 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2197} = 13$Bemerkung: Die Gleichung $2197 = x^3$ lässt sich leicht durch geschicktes Probieren im Kopf lösen. 2197 ist vierstellig, also muss x zweistellig sein. Da $10^3 = 1000$ und $20^3 = 8000$ sind, wird die Lösung nahe bei 10 liegen. Da 2197 ungerade ist, kann x nicht gerade sein. Elf ist sicher noch etwas zu klein, wir überschlagen:

   $$11^3 = 121 \cdot 11 < 1400$$

   Die nächste zu prüfende Zahl ist also $x = 13$. Also, z.B.: $13^3 = 169 \cdot 13 = 1690 + 3 \cdot 100 + (3 \cdot 70 - 3) = 1990 + 210 - 3$, das passt.

Zurück zur Theorie: 1.5

8.5. Zahlen und Mengen

1. Ordnen Sie die folgende Zahlen zu passenden Grundmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$: **Lösung:**
   $12 \in \mathbb{N}$
   $12,\ -8 \in \mathbb{Z}$
   $12,\ -8,\ \frac{2}{3},\ 1{,}41 \in \mathbb{Q}$
   $12,\ -8,\ \frac{2}{3},\ 1{,}41,\ \sqrt{7},\ \pi \in \mathbb{R}$

2. Gegeben sind die drei Mengen $M_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $M_2 = \{e, f, g, h, i\}$ und $M_3 = \{a, c, e, g, i\}$. Bilden Sie die Mengen $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_3$, $M_1 \cup M_3$, $M_2 \cap M_3$ und $M_2 \cup M_3$. Bestimmen Sie außerdem $M_1 \backslash M_2$, $M_2 \backslash M_1$, $M_2 \backslash M_3$ und $M_1 \cap M_2 \cap M_3$ sowie $M_1 \cup M_2 \cup M_3$.
   Lösung:
   $M_1 \cap M_2 = \{e\}$, $M_1 \cup M_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $M_1 \cap M_3 = \{a, c, e\}$, $M_1 \cup M_3 = \{a, b, c, d, e, g, i\}$, $M_2 \cap M_3 = \{e, g, i\}$ und $M_2 \cup M_3 = \{a, c, e, f, g, h, i\}$.
   Außerdem $M_1 \backslash M_2 = \{a, b, c, d\}$, $M_2 \backslash M_1 = \{f, g, h, i\}$, $M_2 \backslash M_3 = \{f, h\}$ und $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{e\}$ sowie $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$.

3. Gegeben seien die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 > x \geqslant 0\},$$
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 9\right\}, D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 1\right\}$$

   Bestimmen Sie jeweils die folgenden Mengen. Skizzieren Sie sich den Sachverhalt zunächst auf der Zahlengeraden, falls es Ihnen schwer fällt.

   a) $A \cup B$ **Lösung:** $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 4\} = \,]-5; 4\,[$
   b) $A \backslash B$ **Lösung:** $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0\} = \,]-5; 0\,[$
   c) $A \cap B$ **Lösung:** $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\} = [\,0; 2\,[$
   d) $C \cap D$ **Lösung:** $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -1 \vee 1 < x \leqslant 3\} = [\,-3; -1\,[\, \cup \,]\,1; 3\,]$
   e) $(\mathbb{R} \backslash D) \cup B$ **Lösung:** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 4\} = [\,-1; 4\,[$
   f) $C \backslash (A \cap B)$ **Lösung:** $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 0 \vee 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [\,-3; 0\,[\, \cup [2; 3]$
   g) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$
   Lösung: $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -1 \vee 0 \leqslant x \leqslant 3\} = [\,-3; -1\,[\, \cup [0; 3]$

4. Lösen Sie nach x auf und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

   a) $4x + 17 > -x - 3$ **Lösung:** $L = \{x | x > -4\} = \,]-4, \infty\,[$
   b) $-4 \cdot (3x - 2) < 6 \cdot (1 - 2x)$ **Lösung:** $L = \{\ \}$

Zurück zur Theorie: 1.6

8.6. Größen und Einheiten

1. Welche der folgenden Einheiten sind kohärent beziehungsweise inkohärent?
   Lösung:

   a) Newton ist kohärent
   b) Kilonewton ist inkohärent
   c) Millinewton ist inkohärent
   d) Kilogramm ist kohärent
   e) Kilometer ist inkohärent
   f) Nanosekunde ist inkohärent

2. Rechnen Sie alle Längenangaben in Kilometer um. **Lösung:**

   a) 12 m = 0,012km
   b) 3,4 m = 0,0034km
   c) 0,5 m = 0,0005km
   d) 100 mm = 0,0001km
   e) 120 dm =0,012km
   f) 150 mm = 0,00015km
   g) 5000 m = 5km
   h) 200000 μm = 0,0002km

3. Rechnen Sie alle Längenangaben in Millimeter um. **Lösung:**
   a) 12 km = $12 \cdot 10^6$ mm
   b) 120 m = 120000mm
   c) 0,5 m = 500mm
   d) 100 cm = 1000mm
   e) 50 km = $50 \cdot 10^6$ mm
   f) 500 m = 500000mm
   g) 800 m = 800000mm
   h) 400 cm = 4000mm

4. In der Seefahrt verwendet man die Längeneinheit Seemeile und die Geschwindigkeitseinheit Knoten. Dabei gilt 1 Seemeile = 1sm = 1852m und 1 Knoten = 1kn= 1 sm/h. Rechnen Sie die Geschwindigkeit 72 kn in die Einheiten km/h und m/s um.
   Lösung: 72kn = 133,344km/h = 37,04m/s

5. Wie viele Minuten und Sekunden fehlen bei 7min 12 s zur vollen Stundenzahl?
   Lösung: Es fehlen noch 52 min und 48s zur vollen Stunde.

6. Eine unermüdliche Schildkröte legt in zwei Wochen die Strecke 100,8 km zurück. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Schildkröte in km/h und in cm/s.
   Lösung: 0,3km/h ; 8,3cm/s

7. Auf einer Autokarte mit dem Maßstab 1: 250000 ist die Fahrstrecke 12.3 cm lang. Wie langebenötigt man für diese Stecke bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h?
   Lösung: 0,615h

8. Eine Spielzeugeisenbahn hat einen Maßstab von 1: 125.
   a) Welche Strecke muss die kleine Eisenbahn in der Stunde fahren, wenn dies einer wirklichen Geschwindigkeit von 80 km/h entsprechen soll?
      Lösung: 640m
   b) Welche Strecke fährt die kleine Eisenbahn in einer Minute und in fünf Minuten?
      Lösung: 10,667m, 53,333m
   c) Welche Strecke hätte der wirkliche Zug zurückgelegt, wenn der kleine Zug in 10 s 300 cm zurückgelegt hat?
      Lösung: 375m
   d) Welche Geschwindigkeit in km/h hätte der wirkliche Zug dann erreicht?
      Lösung: 135km/h

9. Flächenberechnung
   a) Die alte BRD hat eine Fläche von 248800 km^2 bei einer Einwohnerzahl von 61.6 Millionen. Berechnen Sie die Bevölkerungsdichte(Einwohnerzahl pro km^2)
      Lösung: 247,6 Einwohner pro km^2
   b) Kanada hat eine Fläche von 9976000 km^2 einer Einwohnerzahl von 24 Millionen. In welchem Verhältnis stehen die Bevölkerungsdichten der BRD und von Kanada?
      Lösung: 1:103
   c) Wie oft passt die Fläche der BRD in die Fläche Kanadas?
      Lösung: ca. 40,0 mal

10. Die Schallgeschwindigkeit beträgt rund 333 m/s. Welche Geschwindigkeit hat ein Flugzeug bei
    a) zweifacher Schallgeschwindigkeit in km/h und m/min?
       Lösung: 2397,6km/h; 39960m/min

b) vierfacher Schallgeschwindigkeit in km/h und m/min?
Lösung: 4795,2km/h: 79920m/min

Zurück zur Theorie: 1.7

8.7. Dreisatz

1. Bei 12 Arbeitsstücken fallen 3,3 kg Späne an. Wieviel kg Späne entstehen bei 100 Arbeitsstücken? **Lösung:** 27,5 kg
2. Ein Behälter enthält 450 ℓ Wasser und wird bei geöffnetem Hahn in 12 Minuten gefüllt. Wieviel Liter Wasser waren in dem Behälter nach 7 Minuten? **Lösung:** 262,5 ℓ
3. Ein Verkehrsflugzeug mit einer Geschwindigkeit von 850 km/h legt einen Weg in 55 Minuten zurück. Wieviel Zeit braucht ein neuerer Typ Flugzeug, der eine Geschwindigkeit von 950 km/h auf dieser Strecke erreicht.
Lösung: Der neuere Typ des Flugzeugs braucht ungefähr 49 Minuten.
4. Finden Sie den Fehler in den Berechnungen. Ein Auto kostet brutto 23800 Euro. Wie hoch ist der Nettopreis?
$$\begin{array}{rr} 100 & 23800 \\ :100\downarrow & :100\downarrow \\ 1 & 238 \\ \cdot 19\downarrow & \cdot 19\downarrow \\ 19 & 4522 \end{array}$$
Der Nettopreis beträgt 23800 Euro - 4522 Euro = 19278 Euro. **Lösung:** Im Ladenpreis sind die 19 % Mehrwertsteuer schon enthalten, das heißt 23800$\widehat{=}$119%. Damit beträgt der Nettopreis 20000 Euro.

Zurück zur Theorie: 1.8

8.8. Lineare Gleichungssysteme

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

1. $5x - 2y = 24$
$x + 3y = -2$
Lösung: $x = 4,\ y = -2$
2. $2x - 2y = 2$
$-x + y = -2$
Lösung: Keine Lösung.
3. $y = 4x - 7$
$-8x + 2y = -14$
Lösung: $y = 4x - 7$ mit $x \in \mathbb{R}$
4. $b + 3c = 10$
$5a - 3b + c = 5$
$-2b + 2c = -4$
Lösung: $a = 3,\ b = 4,\ c = 2$
5. $x + 2y + z = 9$
$-2x - y + 5z = 5$
$x - y + 3z = 4$
Lösung: $x = 1,\ y = 3\ z = 2$
6. $4x + y + 7z = 12$
$5x + 10z = 5$
$-x - 2y = -2$
Lösung: Keine Lösung.
7. $x - y + z = -2$
$4x + 2y + z = -5$
$6x + 3z = -9$
Lösung: $x = t,\ y = -t - 1,\ z = -2t - 3$ mit $t \in \mathbb{R}$

Zu den Aufgaben für Geübte: 5.9

8.9. Für Geübte

1. Rechnen Sie im Kopf: fangen Sie mit der gegebenen Zahl an und folgen Sie den Rechenanweisungen von oben nach unten. Versuchen Sie geschickt zu rechnen. Der Schwierigkeitsgrad erhöht sich von rechts nach links. Wenn Sie gut geübt sind, sollten Sie pro Spalte höchstens eine Minute brauchen.

Einfach		**Mittel**		**Schwierig**	
40		57		98	
davon $\frac{1}{4}$	$=10$	$\cdot 3$	$= 171$	$+524$	$= 622$
quadrieren	$=100$	$+211$	$=382$	$+\frac{1}{2}$ davon	$= 933$
$+24$	$= 124$	die Hälfte davon	$=191$	$: 3$	$= 311$
$: 4$	$= 31$	-52	$= 139$	-243	$= 68$
$\cdot 2$	$= 62$	verdoppeln	$=278$	$\cdot 5$	$= 340$
-30	$=32$	$+122$	$=400$	$: 20$	$=17$
$: 4$	$=8$	$: 20$	$=20$	quadrieren	$= 289$
$\cdot 7$	$= 56$	$+\frac{3}{10}$ davon	$=26$	$+473$	$= 762$
-22	$= 34$	$: 13$	$=2$	$+\frac{2}{3}$ davon	$= 1270$
34		2		1270	

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

   a) $\frac{9}{x-8} = x$ **Lösung:** $L = \{-1;\ 9\}$

   b) $\frac{5}{x-2} - 3 = \frac{2x-4}{5}$ **Lösung:** $L = \{-\frac{7}{4} \pm \frac{5}{4}\sqrt{17}\}$

   c) $\frac{2x+1}{3} + \frac{10}{2x+1} = 4$ **Lösung:** $L = \{\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{6}\}$

   d) $\frac{2x}{x-4} + \frac{3x}{x+4} = \frac{4(x^2-x+4)}{x^2-16}$ **Lösung:** $L = \{\ \}$, da die errechneten Lösungen Nullstellen des Nenners sind.

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von p.
   $5 \cdot (3 + x) > p \cdot (1 - x) + 3 \cdot (x + 5)$
   Lösung: $p = -2: \ L = \mathbb{R};\ p > -2: \ L = \left\{x | \, x > \frac{p}{p+2}\right\};\ p < -2: \ L = \left\{x | \, x < \frac{p}{p+2}\right\}$

4. Ein Bauer möchte frisch geerntete Früchte trocknen. Insgesamt 100 Kilogramm hat er auf einer großen Decke ausgebreitet und lässt die Sonne ihre Werk verrichten. Zu Beginn lag der Wasseranteil bei 99 Prozent. Einige Tage später ist der Wasseranteil auf 98 Prozent gesunken. Wie schwer sind die Früchte dann - inklusive des in ihnen enthaltenen Wassers?
   Lösung: Anfangs beträgt der Anteil der Trockenmasse 1 Prozent, also 1 kg. Die Trockenmasse bleibt während der Trocknung konstant, das heißt beim nächsten Wiegen entspricht dies $100 - 98 = 2$ Prozent der Gesamtmasse. Damit wiegen die Früchte nur noch 50 kg.

5. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme. **Lösung:**

   a) $-4x + 7y - 5z = 4$
   $6x + 3z = -8$
   $-4x - 8y - 6z = -8$
   $x = -\frac{7}{3},\ y = \frac{2}{3},\ z = 2$

   b) $2a + 6b - 3c = -6$
   $4a + 3b + 3c = 6$
   $4a - 3b + 9c = 18$
   $a = -1{,}5t + 3, t \in \mathbb{R}$
   $b = t - 2,\ c = t$

   c) $2x - 3y - z = 4$
   $x + 2y + 3z = 1$
   $3x - 8y - 5z = 5$
   Keine Lösung

Zurück zur Theorie: 2

9. Funktionen

9.1. Lineare Funktionen

1. Bestimmen Sie aus den gegebenen Informationen den Funktionsterm $f(x) = ax + b$.

   a) $a = 3$ und der Punkt $P(2; 16)$ liegt auf der Geraden. **Lösung:** $f(x) = 3x + 10$.

   b) Die Gerade verläuft durch den Punkt $Q(-1; -2)$ und ist parallel zur Geraden mit der Gleichung $g(x) = -2x + 1$. **Lösung:** $f(x) = -2x - 4$.

   c) Es ist $b = -1{,}5$ und $f(2{,}5) = 16$. **Lösung:** $f(x) = 7x - 1{,}5$.

   d) Es ist $f(3) = 4$ und $f(-9) = 8$. **Lösung:** $f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$.

2. Ein Unternehmen fertigt Stühle an. Die Produktionskosten setzen sich aus Fixkosten (Miete, Maschinen,...) von 20000 Euro und variablen Kosten (Material, Arbeitszeit,...) für jeden einzelnen Stuhl von 30 Euro zusammen. Ein Stuhl wird für 80 Euro verkauft.

   a) Geben Sie den Gewinn (Einnahmen minus Kosten) als Funktion in Abhängigkeit der Anzahl der Stühle an. **Lösung:** $f(x) = 80 \cdot x - 30 \cdot x - 20000 \Rightarrow f(x) = 50x - 20000$.

   b) Wieviel Gewinn wird bei einem Verkauf von 3000 Stühlen gemacht?
   Lösung: $f(3000) = 130000$.

   c) Bestimmen Sie die Anzahl der Stühle, ab der die Firma Gewinn macht.
   Lösung: $x = 400$.

Zurück zur Theorie: 2.2

9.2. Quadratische Funktionen

1. Bestimmen Sie die Nullstellen und stellen Sie mithilfe der quadratischen Ergänzung den Funktionsterm $f(x)$ in der Scheitelform dar.

   a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ **Lösung:** $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}$, $f(x) = (x-2)^2 - 3$

   b) $f(x) = x^2 + 3x - 4$ **Lösung:** $x_1 = -4, \quad x_2 = 1$, $f(x) = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$

   c) $f(x) = -2x^2 + 4x - 8$ **Lösung:** Keine rellen Nullstellen, $f(x) = -2(x-1)^2 - 6$

2. Die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat die Nullstellen -1 und 3. Bestimmen Sie jeweils die Parameter a, b und c, für die folgenden Werte von f der Stelle $x = 0$:

   Lösung: Für alle Aufgaben gilt: $f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$ und $f(3) = 0 \Rightarrow 9a + 3b + c = 0$.

   a) $f(0) = 3 \Rightarrow c = 3$ Damit ergibt das LGS für $a = -1$ und $b = 2$.

   b) $f(0) = -3 \Rightarrow c = -3$ Damit ergibt das LGS für $a = 1$ und $b = -2$.

   c) $f(0) = -6 \Rightarrow c = -6$ Damit ergibt das LGS für $a = 2$ und $b = -4$.

   d) $f(0) = 1{,}5 \Rightarrow c = 1{,}5$ Damit ergibt das LGS für $a = -0{,}5$ und $b = 1$.

   Alternativer Ansatz: $f(x) = a(x+1)(x-3)$.

Zurück zur Theorie: 2.3

9.3. Ganzrationale Funktionen

1. Lösen Sie folgende Gleichungen für x. Machen Sie sich jeweils klar, für welche Funktion Sie damit die Nullstellen berechnet haben. **Lösung:**

   a) $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x^2 = -x \Rightarrow x_1 = -1,\, x_2 = 0$

   b) $(x-3)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x = 3 \pm 4 \Rightarrow x_1 = 7,\, x_2 = -1$

   c) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x^2} - 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - x - 2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2},\, x_2 = -1$

   d) $\frac{1-x}{1+x} = x \Leftrightarrow 1 - x = x + x^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow x_1 = -1 + \sqrt{2},\, x_2 = -1 - \sqrt{2}$

   e) Die Lösung gilt nur für $b \neq 0$. Falls $b = 0$ ist, muss $a = -c$ gelten, dann ist x beliebig.

   $$\begin{aligned} &a - (a-b)\,x = (b-a)\,x - (c + bx) \\ \Leftrightarrow\; &a - ax + bx \Leftrightarrow bx = -(a+c) = bx - ax - c - bx \Leftrightarrow x = -\frac{a+c}{b} \end{aligned}$$

   f) Die Lösung ist leicht zu sehen: $\sqrt{2x^2 - 1} = -x \Leftrightarrow x = -1$ Wird statt dessen konventionell quadriert, so muss man mittels Probe die Lösung mit dem richtigen Vorzeichen finden: $2x^2 - 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$ Die Lösung $x = 1$ ist nicht möglich, da der Wurzelausdruck (linke Seite) kein negatives Ergebnis (r.S.) haben kann.

2. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen.

   a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ **Lösung:** $x_1 = -3,\; x_2 = 1,\; x_3 = 4$

   b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8$ **Lösung:** $x_1 = -1$, doppelte Nullstelle bei $x_2 = 2$

   c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 6x^2 - 4{,}5x + 11$ **Lösung:** $x_1 = -11,\; x_2 = -2,\; x_3 = 1$

   d) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 4x + 12$ **Lösung:** $x_1 = -2,\; x_2 = -1,\; x_3 = 1,\; x_4 = 6$

   e) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 40$ **Lösung:** $x_1 = 5$

   f) $f(x) = 20x^3 - 120x^2 + 220x - 120$ **Lösung:** $x_1 = 1,\; x_2 = 2,\; x_3 = 3$

Zurück zur Theorie: 2.4

9.4. Winkelfunktionen

1. Geben Sie die Winkel im Bogenmaß als Vielfache von π an.

   a) 180°, 270°, 315°, 135° **Lösung:** $\pi,\, \frac{3}{2}\pi,\, \frac{7}{4}\pi,\, \frac{3}{4}\pi$

   b) 2°, 10°, 100°, 60° **Lösung:** $\frac{1}{90}\pi,\, \frac{1}{18}\pi,\, \frac{5}{9}\pi,\, \frac{\pi}{3}$

2. Geben Sie die Winkel im Gradmaß an.

   a) $3\pi,\, \frac{3}{10}\pi,\, \frac{\pi}{2},\, \frac{2}{3}\pi$ **Lösung:** 540°, 54°, 90°, 120°

   b) $\frac{\pi}{6},\, \frac{\pi}{18},\, \frac{5}{18}\pi,\, \frac{5}{4}\pi$ **Lösung:** 30°, 10°, 50°, 225°

3. Bestimmen Sie den exakten Funktionswert

   a) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ **Lösung:** $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$

   b) $\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$ **Lösung:** $\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

   c) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ **Lösung:** $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

   d) $\cos(-3\pi)$ **Lösung:** $\cos(-3\pi) = -1$

4. Bestimmen Sie die Periode und die Amplitude von f. Geben Sie außerdem ohne Rechnung die Koordinaten je eines Hochpunktes H und eines Tiefpunktes T des Graphen von f an.
   a) $f(x) = 2\sin(2x)$ **Lösung:** $p = \pi,\ a = 2,\ H = (\pi/4; 2),\ T = (3/4\pi; -2)$
   b) $f(x) = \sin(\pi(x-1)) + 1$ **Lösung:** $p = 2,\ a = 1,\ T = (1/2; 0),\ H = (3/2; 2)$
   c) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1$ **Lösung:** $p = 4,\ a = 1,\ H = (0; 0),\ T = (2; -2)$
   d) $f(x) = -1{,}5\cos(x+\pi)$ **Lösung:** $p = 2\pi,\ a = 1{,}5,\ H = (2\pi; 1{,}5),\ T(\pi; -1{,}5)$
5. Berechnen Sie. **Lösung:**
   a) $\sin(2x) + 7 = 8,\ x \in [0; 2\pi] \Rightarrow \sin(2x) = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow L = \left\{\frac{\pi}{4};\ \frac{5}{4}\pi\right\}$
   Die weitere Lösung erhält man durch die Periodizität der Funktion ($p = \pi$) unter Beachtung des gegebenen Intervalls.
   b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1 = 0,\ x \in [0; 10] \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4}x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow L = \{0;\ 8\}$
   Die weitere Lösung erhält man durch die Periodizität der Funktion ($p = 8$) unter Beachtung des gegebenen Intervalls.

Zurück zur Theorie: 2.5

9.5. Die Umkehrfunktion

1. Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$, die durch $f(x)$ definiert ist, sodass sie eindeutig umkehrbar ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion mit ihrem Definitionsbereich.
   a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **Lösung:** $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} + 1,\ D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
   b) $f(x) = \dfrac{x+3}{5x-7}$ **Lösung:** $D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{7}{5}\right\}$ und $f^{-1}(x) = \dfrac{7x+3}{5x-1},\ D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$
   c) $f(x) = \sqrt{2x+6}$ **Lösung:** $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant -3\}$ und $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3,\ D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$
2. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion folgender Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, die jeweils durch $f(x)$ definiert sind. Hinweis: Hier gilt jeweils: $x > 0$.
   a) $f(x) = 3x^2 + x$ **Lösung:** $f^{-1}(x) = -\frac{1}{6} + \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{x}{3}},\ ,\ D_{f^{-1}} = \left(-\frac{1}{12}, \infty\right)$
   b) $f(x) = (x^2+1)^{-1}$ **Lösung:** $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1},\ D_{f^{-1}} = (0{,}1]$
   c) $f(x) = \sqrt{-2x}$ **Lösung:** Die Funktion $f(x)$ ist für $x > 0$ nicht definiert. Daher existiert auch keine Umkehrfunktion. Ist $x < 0$, so gilt für die Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2,\ D_{f^{-1}} = (0, \infty)$

Zurück zur Theorie: 2.6

9.6. Wurzelfunktionen

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

1. $f(x) = x^4 - 625$ **Lösung:** $x_{1,2} = \pm 5$
2. $f(x) = 2x^3 + 0{,}25$ **Lösung:** $x = -0{,}5$
3. $f(x) = \dfrac{x^4}{8} + 2$ **Lösung:** keine Lösung
4. $f(x) = (x-3)^5 + \frac{1}{32}$ **Lösung:** $x = \frac{5}{2}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x} + 8$ **Lösung:** -512
6. $f(x) = \sqrt[5]{x-1} - 2$ **Lösung:** $x = 33$
7. $f(x) = x^{-1} - 5\sqrt{x^3}$ **Lösung:** $x = \frac{1}{\sqrt[5]{25}}$

Zurück zur Theorie: 2.7

9.7. Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen

1. Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen exakt.
   a) $f(x) = e^x - 5$ **Lösung:** $x = \ln 5$
   b) $f(x) = -3e^x + 2$ **Lösung:** $x = \ln 2 - \ln 3$
   c) $f(x) = e^{-x} + 4$ **Lösung:** Keine Lösung, da $e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
   d) $f(x) = \frac{5}{2}e^{-2x} - \frac{5}{2}e$ **Lösung:** $x = -\frac{1}{2}$
2. Bestimmen Sie die Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot q^x$, deren Graph durch die Punkte $P = (0; 1{,}5)$ und $Q = (2; 6)$verläuft.
   Lösung: $f(0) = 1{,}5 \Rightarrow a = 1{,}5,\ f(2) = 6 \Rightarrow 6 = 1{,}5 \cdot q^2 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow f(x) = 1{,}5 \cdot 2^x$
3. Eine Nährlösung enthält zu Beginn des Versuchs 50000 Bakterien. Täglich vermehrt sich die Anzahl der Bakterien um 10%.
   a) Wie lautet die zugehörige Wachstumsfunktion? **Lösung:**
   $f(t) = 50000 \cdot 1{,}1^t = 50000 \cdot e^{\ln 1{,}1 \cdot t}$, wobei t die Anzahl der Tage ist.
   b) Wie viele Bakterien sind nach 5 Tagen in der Nährlösung? **Lösung:** $f(5) = 80526$
   c) Bestimmen Sie die Verdopplungszeit. **Lösung:**
   $2 \cdot 50000 = 50000 \cdot e^{\ln 1{,}1 \cdot t} \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}1} \approx 7{,}27$ Tage
   d) Wann hat sich die Zahl der Bakterien verzehnfacht? **Lösung:**
   $10 \cdot 50000 = 50000 \cdot e^{\ln 1{,}1 \cdot t} \Rightarrow t = \frac{\ln 10}{\ln 1{,}1} \approx 24{,}16$ Das heißt, nach ungefähr 24,16 Tagen hat sich die Zahl verzehnfacht.

Zurück zur Theorie: 2.8

9.8. Symmetrieeigenschaften von Funktionen

Entscheiden Sie, welche Symmetrieeigenschaften folgende Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ haben:

1. $f(x) = x^3 - 5x$ **Lösung:**
   $f(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -f(x)$, d.h. $f(x)$ ist eine ungerade Funktion.
2. $f(x) = \sqrt{x}$ **Lösung:** $D_f = [0; +\infty)$ Da $f(-x) = \sqrt{(-x)}$ auf D_f nur für $x = 0$ definiert ist, ist $f(x)$ ist weder gerade noch ungerade.
3. $f(x) = \sin(x)$ **Lösung:**
   $f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$, d.h. $f(x)$ ist eine ungerade Funktion.
4. $f(x) = |x|$ **Lösung:** $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, d.h. $f(x)$ ist eine gerade Funktion.
5. $f(x) = \sin(x + \pi)$ **Lösung:**
   $f(-x) = \sin(-x + \pi) = -\sin(x + \pi) = -f(x)$, d.h. $f(x)$ ist eine ungerade Funktion.

Zurück zur Theorie: 2.9

9.9. Translationen, Streckung und Stauchung

1. Führen Sie folgende Translationen und Verschiebungen an der Normalparabel durch:

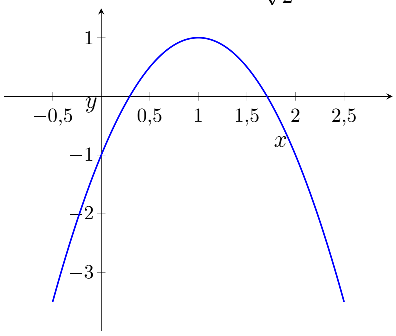
   a) Verschiebung um 1 nach rechts

   b) Spiegelung an der x-Achse

   c) Streckung mit Faktor 2 in $y-$Richtung

   d) Verschiebung nach oben um 1

   Skizzieren Sie den Funktionsgraph! Berechnen Sie hierfür die Nullstellen. Geben Sie die Funktionsgleichung in üblicher Form an. **Lösung:** $f(x) = -2\,(x-1)^2 + 1 = -2x^2 + 4x - 1$ Also liegt der Scheitel in $S = (1{,}1)$. Die Nullstellen liegen bei: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ Mit $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bekommt man die zugehörigen Punkte für die Skizze:



2. Verschieben Sie die Funktion $f(x) = 3e^{-5x} - 5$ so, dass der Graph bei $x = 0$ die x-Achse schneidet. **Lösung:** $f(0) = -2 \Rightarrow f_{neu}(x) = f(x) + 2 = 3e^{-5x} - 3$

3. Strecken Sie die Funktion $f(x) = -e^{3x-3} - 2$ so, dass sie bei $x = 1$ den Wert 4 hat. **Lösung:** $f(1) = -3 \Rightarrow f_{neu}(x) = -\frac{4}{3} \cdot f(x) = \frac{4}{3}e^{3x-3} + \frac{8}{3}$

4. Geben Sie den Funktionsterm $g(x)$ an, den Sie erhalten, wenn Sie

   a) die Amplitude der Funktion $f(x) = \sin(x)$ verdoppeln und den Funktionsgraphen dann um 3 nach unten schieben. **Lösung:** $g(x) = 2\sin(x) - 3$

   b) die Amplitude der Funktion $f(x) = \cos(x)$ auf ein Drittel verkleinern und die Periode vervierfachen. **Lösung:** $g(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

   c) den Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ um 1 nach oben und um 4 nach links schieben. **Lösung:** $g(x) = \sin(x+4) + 1$

Zurück zur Theorie: 2.10

9.10. Kombination und Verkettung von Funktionen

1. Bestimmen Sie $(f \circ g)(x)$ und $(g \circ f)(x)$ und die Definitionsbereiche!

   a) $f(x) = 1 + x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$ und $g(x) = \sqrt{x}, \quad D_g = [0;\infty)$
   Lösung: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + x, \quad D = [0;\infty)$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 + x^2}, \quad D = \mathbb{R}$

   b) $f(x) = (3 - x)^2, \quad D_f = \mathbb{R}$ und $g(x) = 3x + 1, \quad D_g = \mathbb{R}$
   Lösung: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2 - 3x)^2, \quad D = \mathbb{R}$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3(3 - x)^2 + 1, \quad D = \mathbb{R}$

c) $f(x) = -e^x, \quad D_f = \mathbb{R}$ und $g(x) = x^2 - 3, \quad D_g = \mathbb{R}$
Lösung: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -e^{x^2-3}, \quad D = \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (-e^x)^2 - 3 = e^{2x} - 3, \quad D = \mathbb{R}$

2. Suchen Sie für die Funktion f eine mögliche Verkettung der Form $h \circ g$.

   a) $f(x) = \sin(x-3)$ **Lösung:** $g(x) = x - 3,\ h(x) = \sin(x)$

   b) $f(x) = (2x+8)^3$ **Lösung:** $g(x) = 2x + 8,\ h(x) = x^3$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-7}$ **Lösung:** $g(x) = x^2 - 7,\ h(x) = \dfrac{1}{x}$

   d) $f(x) = e^{2x}$ **Lösung:** $g(x) = 2x,\ h(x) = e^x$

Zu den Aufgaben für Geübte: 6.11

9.11. Für Geübte

1. Ein Sportverein veranstaltet ein großes Schachturnier. Jeder spielt genau einmal gegen jeden anderen. Nach jeder Partie werden den Spielern Karten ausgehändigt. Der Sieger bekommt eine grüne, der Verlierer eine rote. Bei einem Remis erhalten beide Spieler je eine gelbe Karte.
   Nach dem Turnier stellt der Veranstalter fest, dass von jeder Farbe genau 752 Karten ausgegeben wurden. Wie viele Teilnehmer hatte das Turnier?

   Lösung: Anzahl der Spiele: $752 \cdot 3 : 2 = 1128$.
   Bei n Spielern sind es $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 3 + 2 + 1 = n \cdot (n-1) : 2$ Spiele.
   Damit gilt $n^2 - n - 2256 = 0$ und somit haben 48 Spieler teilgenommen.

2. Bilden Sie aus den Bausteinen $x + 3$ und $x^2 - 4$ eine ganzrationale Funktion

   a) vom Grad 3 mit 3 einfachen Nullstellen, **Lösung:** Zum Beispiel $f(x) = (x+3)(x^2-4)$ und jede beliebige Steckung dieser Funktion.

   b) vom Grad 4 mit 2 doppelten Nullstellen, **Lösung:** Zum Beispiel $f(x) = (x^2-4)^2$ und jede beliebige Steckung dieser Funktion.

   c) vom Grad 5 mit genau einer Nullstelle. **Lösung:** Zum Beispiel $f(x) = (x+3)^5$ und jede beliebige Steckung dieser Funktion.

3. Berechnen Sie.

   a) $-2\cos(\pi(x-1)) + 1 = 2,\ x \in [-2; 2]$ **Lösung:** $L = \left\{-\frac{5}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{5}{3}\right\}$

   b) $-2\cos(x+\pi) = \sqrt{3},\ x \in [0; 2\pi]$ **Lösung:** $L = \left\{\frac{1}{6}\pi;\ \frac{11}{6}\pi\right\}$

4. Bestimmen Sie die Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot q^x$, deren Graph durch die Punkte P(-2/50) und Q(3/0,512) verläuft.
   Lösung: P(-2/50) $\Rightarrow a \cdot q^{-2} = 50$, Q(3/0,512) $\Rightarrow a \cdot q^3 = 0{,}512$
   $\Rightarrow q^5 = 0{,}01024 \Rightarrow q = \sqrt[5]{0{,}01024} = 0{,}4 \Rightarrow a = 50 \cdot 0{,}4^2 = 8 \Rightarrow f(x) = 8 \cdot 0{,}4^x$

5. Der Wirkstoff einer Schmerztablette wird im menschlichen Körper näherungsweise exponentiell abgebaut. Nimmt ein Patient eine Tablette, die 0,5g des Wirkstoffs enthält, so befinden sich nach 10 Stunden noch ca. 0,09g im Körper.
   Lösung: Ansatz für die Funktion: $f(t) = 0{,}5 \cdot q^t$, wobei t für die Anzahl der Stunden nach der Einnahme steht. Es gilt $f(10) = 0{,}09$.
   $\Rightarrow q = \sqrt[10]{0{,}18} \approx 0{,}8424 \Rightarrow f(t) = 0{,}5 \cdot 0{,}8424^t = 0{,}5 \cdot e^{\ln(0{,}8424) \cdot t}$

a) Nach welcher Zeit ist die Hälfte (sind 90%) des Wirkstoffes abgebaut?
Lösung: Gesucht ist die Halbwertszeit t_H mit $f(t_H) = 1/2 \cdot 0{,}5 \Rightarrow t_H \approx 4{,}042$ Stunden. $f(t) = 0{,}1 \cdot 0{,}5 \Rightarrow t \approx 13{,}43$ Stunden.

b) Jemand nimmt um 9 Uhr eine Tablette und um 15 Uhr zwei weitere mit jeweils 0,5g des Wirkstoffes. Wie viel g sind davon um 20 Uhr desselben Tages noch im Körper vorhanden?
Lösung: $f(t) = 0{,}5 \cdot e^{\ln(0{,}8424) \cdot t}$, $g(t) = 1 \cdot e^{\ln(0{,}8424) \cdot t}$, $f(11) + g(5) \approx 0{,}5$ Gramm.

Zurück zur Theorie: 3

10. Differenzial- und Integralrechnung

10.1. Differenzialrechnung

1. Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktionen

   a) $f(x) = 5x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 3$ **Lösung:**

   $$f'(x) = 25x^4 - 12x^3 - 4x, \qquad f''(x) = 100x^3 - 36x^2 - 4$$

   b) $f(x) = 2(3x^3 - 2x)$ **Lösung:**

   $$f'(x) = 2(9x^2 - 2), \qquad f''(x) = 36x$$

   c) $f(x) = x^3 \cdot (2x^2 - 4)$ **Lösung:**

   $$f'(x) = 3x^2 \cdot (2x^2 - 4) + x^3 \cdot 4x = 10x^4 - 12x^2, \qquad f''(x) = 40x^3 - 24x$$

   d) $f(x) = 2x^3 \cdot 4x^2$ **Lösung:**

   $$f'(x) = 40x^4, \qquad f''(x) = 160x^3$$

   e) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{4x^3}$ **Lösung:**

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x+3) \cdot 4x^3 - (2x^2+3x) \cdot 12x^2}{(4x^3)^2} \\ &= \frac{(4x+3) \cdot 4x^3 - (2x+3) \cdot 3 \cdot 4x^3}{(4x^3)^2} \\ &= \frac{-2x-6}{4x^3} = -\frac{x+3}{2x^3} \\ f''(x) &= \frac{2x+9}{2x^4} \end{aligned}$$

   f) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{2x}$ **Lösung:**

   $$f'(x) = \frac{3x^4 + 1}{2x^2}, \qquad f''(x) = \frac{3x^4 - 1}{x^3}$$

   g) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ **Lösung:**

   $$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

   h) $f(x) = (x+1)^7$ **Lösung:**

   $$f'(x) = 7(x+1)^6, \qquad f''(x) = 42(x+1)^5$$

i) $f(x) = (x^2-1)^{-3}$ **Lösung:**

$$f'(x) = -6x(x^2-1)^{-4} = -\frac{6x}{(x^2-1)^4}$$

$$f''(x) = -6(x^2-1)^{-4} - 6x \cdot (-4)(x^2-1)^{-5} \cdot (2x) = (42x^2+6) \cdot (x^2-1)^{-5} = \frac{42x^2+6}{(x^2-1)^5}$$

Achtung! Es wird die kleinste Potenz des gemeinsamen Faktors ausgeklammert. Es gilt allgemein $z^{-4} = z^{-5} \cdot z$.

2. Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

a) $f(x) = \sqrt{3x-4}$ **Lösung:**

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-4}}$$

b) $f(x) = (\sin x)^2$ **Lösung:**

$$f'(x) = 2\sin x \cos x$$

c) $f(x) = \cos x^2$ **Lösung:**

$$f'(x) = -\sin x^2 \cdot 2x$$

d) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2+3x}$ **Lösung:**

$$f'(x) = \frac{4x+3}{3\sqrt[3]{2x^2+3x}^2}$$

e) $f(x) = x^3 \cdot \sin x$ **Lösung:**

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x = x^2(3\sin x + x\cos x)$$

f) $f(x) = \dfrac{3x^2}{\cos x}$ **Lösung:**

$$f'(x) = \frac{6x\cos x + 3x^2 \sin x}{(\cos x)^2}$$

Zurück zur Theorie: 3.2

10.2. Anwendungen der Differenzialrechnung

1. Bilden Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $x_1 = 2$

a) $f(x) = 2x^4$ **Lösung:** $f'(x) = 8x^3$, $\quad t(x) = 64(x-2) + 32 = 64x - 96$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **Lösung:** $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $\quad t(x) = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

c) $f(x) = x^{-3}$ **Lösung:** $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$, $\quad t(x) = -\frac{3}{16}(x-2) + \frac{1}{8} = -\frac{3}{16}x + \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^3$ **Lösung:** $f'(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}x\right)^2$, $\quad t(x) = \frac{3}{16}(x-2) + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}x - \frac{1}{4}$

2. Bestimmen Sie die Extremstellen der folgenden Funktionen und entscheiden Sie, ob es sich jeweils um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum handelt.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^2 - 2x - 3$ **Lösung:** $f'(x) = x^2 + \frac{7}{2}x - 2,\ f''(x) = 2x + \frac{7}{2}$
$\Rightarrow$ relatives Maximum bei $x = -4$ und relatives Minimum bei $x = \frac{1}{2}$

b) $f(x) = e^x + e^{-x}$ **Lösung:**
$f'(x) = e^x - e^{-x},\ f''(x) = e^x + e^{-x} \Rightarrow$ relatives Minimum bei $x = 0$

c) $f(x) = 2\sin(\pi x)$ im Intervall $[0; 2]$ **Lösung:** $f'(x) = 2\pi\cos(\pi x),\ f''(x) = -2\pi^2\sin(\pi x)$
$\Rightarrow$ relatives Maximum bei $x = \frac{1}{2}$ und relatives Minimum bei $x = \frac{3}{2}$

Zurück zur Theorie: 3.3

10.3. Integralrechnung

1. Berechnen Sie $\int f(x)\,dx$ für

a) $f(x) = 2x^4$ **Lösung:** Die meisten der folgenden Integrale lassen sich durch die Integrationsregel für das Monom berechnen:

Es wird zunächst der Exponent um 1 erhöht und dann mit dem Kehrwert des Exponenten multipliziert.

Oft muss hierzu zunächst eine geeignete Termumformung mit den Rechenregeln der Potenzrechnung durchgeführt werden:

$$\int 2x^4\,dx = \frac{1}{5}\left[2x^5\right] + c = \frac{2}{5}x^5 + c$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **Lösung:**

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}\left[x^{-1}\right] + c = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^3$ **Lösung:** $\int \left(\frac{1}{4}x\right)^3\,dx = \int \frac{1}{64}x^3\,dx = \frac{1}{64}\int x^3\,dx = \frac{1}{64}\left[\frac{1}{4}x^4\right] + c = \frac{1}{256}x^4 + c$

d) $f(x) = 2x^4 + 4x^3 - 3x^2$ **Lösung:** $\int (2x^4 + 4x^3 - 3x^2)\,dx = \frac{2}{5}x^5 + x^4 - x^3 + c$

e) $f(x) = 5x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 3$ **Lösung:** $\int (5x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 3)\,dx = \frac{5}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 3x + c$

f) $f(x) = x^3 \cdot (2x^2 - 4)$ **Lösung:** $\int x^3 \cdot (2x^2 - 4)\,dx = \int 2x^5 - 4x^3\,dx = \frac{1}{3}x^6 - x^4 + c$

g) $f(x) = 2x^3 \cdot 4x^2$ **Lösung:** $\int 2x^3 \cdot 4x^2\,dx = \int 8x^5\,dx = \frac{4}{3}x^6 + c$

h) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{4x^3}$ **Lösung:**

$$\int \frac{2x^2 + 3x}{4x^3}\,dx = \int \frac{2x^2}{4x^3} + \frac{3x}{4x^3}\,dx = \int \frac{1}{2}x^{-1} + \frac{3}{4}x^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{3}{4}x^{-1} + c$$

i) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{2x}$ **Lösung:** $\int \frac{x^4-1}{2x}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(x^3 - x^{-1}\right)\,dx = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}\ln|x| + c$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ **Lösung:** $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x + 1| + c$

k) $f(x) = (x + 1)^7$ **Lösung:** $\int (x + 1)^7\,dx = \frac{1}{8}(x + 1)^8 + c$

l) $f(x)=\sqrt{x-4}$ **Lösung:**

$$\int \sqrt{x-4}\,dx=\int (x-4)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{x-4}^{3}+c$$

m) $f(x)=\sin x$ **Lösung:** $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$

n) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt[5]{x}}$ **Lösung:**

$$\int \frac{3}{\sqrt[5]{x}}\,dx=\int 3x^{-\frac{1}{5}}\,dx=\frac{15}{4}x^{\frac{4}{5}}+c=\frac{15}{4}\sqrt[5]{x^4}+c$$

o) $f(x)=\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^2$ **Lösung:**

$$\int \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2\,dx=\int \sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}+1\right)\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}-2x+x^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$$

2. Berechnen Sie **Lösung:**

a) $\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

b)

$$\int\limits_1^4 2(3x^3-2x)dx=\left[\frac{3}{2}x^4-2x^2\right]_1^4=\frac{3}{2}4^4-2\cdot 4^2-\left(\frac{3}{2}1^4-2\cdot 1^2\right)$$
$$=\frac{3}{2}\cdot 256-32-\frac{3}{2}1^4+2=354-\frac{3}{2}=\frac{705}{2}$$

c)

$$\int\limits_{\frac{1}{5}}^{5} x^{-4}dx=\left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_{\frac{1}{5}}^{5}=-\frac{1}{3}5^{-3}+\frac{1}{3}5^3=\frac{1}{3}\left(125-\frac{1}{125}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{(12500+2500+625)-1}{125}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{15624}{125}=\frac{5208}{125}$$

3. Bestimmen Sie die Fläche unter dem Graphen von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ für $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant 0$ mit

a) $f(x)=4-x^2$
Lösung: Die untere Integrationsgrenze ist 0 wegen $x\geqslant 0$ und die obere ist 2 weil: $4-x^2\geqslant 0$ für $-2\leqslant x\leqslant 2$ Damit folgt:

$$\int_0^2 \left(4-x^2\right)\,dx=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

b) $f(x)=e-e^x$
Lösung: Die untere Integrationsgrenze ist 0 wegen $x\geqslant 0$ und die obere ist 1 weil:

$e - e^x \geqslant 0$ für $x \leqslant 1$ Damit folgt: $\int_0^1 (e - e^x)\; dx = [ex - e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$

Zu den Aufgaben für Geübte: 7.4

10.4. Für Geübte

1. Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion möglichst kleinen Grades, für die gilt:

   a) Die Funktion hat bei H=(0;1) einen Hochpunkt.

   b) Der Graph der Funktion schneidet bei $x = 2$ die x-Achse.

   c) Bei $x = 1$ befindet sich eine Wendestelle.

   Lösung: Aus den Bedingungen ergeben sich 4 Gleichungen, so dass die Funktion mindestens dritten Grades sein muss. Das heißt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

   a) $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$ b) $f(2) = 0$ c) $f''(1) = 0$

   Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem mit 4 Unbekannten a, b, c und d.
   $\Rightarrow a = \frac{1}{4},\; b = -\frac{3}{4},\; c = 0,\; d = 1$ und damit die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 1$.

2. Welche Funktion $f(x) = a \cdot \sin(\pi \cdot x) + b$ hat für $x = 2$ die Steigung 3π und den Wert 4?
   Lösung: Es gilt $f'(x) = a{\cdot}\pi{\cdot}\cos(\pi{\cdot}x)$. Aus den Bedingungen ergeben sich die Gleichungen $a \cdot \pi \cdot \cos(\pi \cdot 2) = 3 \cdot \pi,\; a \cdot \sin(\pi \cdot 2) + b = 4$ und somit $f(x) = 3 \cdot \sin(\pi \cdot x) + 4$.

3. Bestimmen Sie a, b und k für $f(x) = a \cdot e^{kx} + b$ unter folgenden Bedingungen:

   a) Die Asymptote des Funktionsgraphen besitzt die Gleichung $y = 3$.

   b) Der Graph der Funktion schneidet bei -2 die y-Achse.

   c) Die Tangente an der Stelle $x = 0$ hat die Steigung $5 \cdot \ln(2)$.

   Lösung:

   a) $f(x) \to 3$ für $x \to +\infty$. $\Rightarrow b = 3$

   b) $f(0) = -2 \;\Rightarrow a + b = -2$

   c) $f'(0) = 5 \cdot \ln(2) \Rightarrow a \cdot k + b = 5 \cdot \ln(2)$

   $\Rightarrow a = -5,\; b = 3,\; k = -\ln(2)$ und damit die Funktion $f(x) = -5e^{-ln(2)x} + 3$.

Zurück zur Theorie: 4

11. Vektorrechnung

11.1. Geometrie

Berechnen Sie das Volumen sowie die Oberfläche

1. des Quaders mit den Kantenlängen: L= 100 m; B= 100 cm; H= 50 mm.
   Lösung: $V = 5\text{m}^3$, $A = L \cdot B \cdot 2 + 2 \cdot L \cdot H + 2 \cdot B \cdot H = 210{,}1\text{m}^2$

2. des Zylinders mit Durchmesser: D= 5 km und Höhe H= 500 mm.
   Lösung: $V = 9{,}8 \cdot 10^6\text{m}^3$, $A = 39277762\text{m}^2$

Zurück zur Theorie: 4.2

11.2. Rechnen mit Vektoren

1. Bei einem geraden dreiseitigen Prisma ABCDEF sind A, B und C die Ecken der Grundfläche. Die Höhe des Prismas beträgt 5. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte D, E und F für

   a) A=(2;0;3), B=(1;0;7), C=(-7;0;3) **Lösung:** D=(2;5;3), E=(1;5;7), F=(-7;5;3)

   b) A=(2;0;3), B=(6;2;3), C=(3;3;3) **Lösung:** D=(2;0;8), E=(6;2;8), F=(3;3;8)

   c) Welche besondere Lage im Koordinatensystem haben die Punkte A,B und C? Die Grundfläche des ersten Prismas liegt in der x_1x_3-Ebene und die Grundfläche des zweiten Prismas liegt in einer Ebene parallel zur x_1x_2-Ebene, die um 3 Längeneinheiten nach oben verschoben wurde.

2. Berechnen Sie mit folgenden Vektoren und Skalaren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, k = 5, l = -2$$

   Lösung:

   a)

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

   b)

$$l\vec{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}, k\vec{u} + l\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}, k\vec{v} - l\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{21}{2} \\ -21 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   c) a, b, so dass $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$ gilt. Was sagt Ihnen das Ergebnis? **Lösung:**

$$\begin{aligned} 1a + \frac{3}{2}b &= 4 \\ 2a - 3b &= 0 \\ 3a + 0 &= 6 \Rightarrow a = 2,\ b = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Achtung: Die Lösung muss alle Gleichungen erfüllen. Dies ist zu prüfen!
Die drei Vektoren sind linear abhängig. Jeweils zwei der Vektoren spannen eine Ebene auf, zu welcher der dritte Vektor kollinear liegt. Sie sind nicht paarweise linear abhängig. (Man beachte die Nullelemente.)

d) Die Länge aller drei Vektoren.
Lösung:

$$|\vec{u}| = \sqrt{14},\ |\vec{v}| = \frac{3}{2}\sqrt{5},\ |\vec{w}| = 2\sqrt{13}$$

3. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Strecke AB mithilfe von Vektoren.
Lösung: $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

   a) A=(3;2;5), B=(5;2;3) **Lösung:** M=(4;2;4)

   b) A=(2;1;-2), B=(-5;1;9) **Lösung:** M=(-1,5;1;3,5)

   c) A=(0;0;2), B=(-2;0;0) **Lösung:** M=(-1;0;1)

4. In einem Dreieck ABC sind die Punkte M_A, M_B und M_C die Mittelpunkte der Dreiecksseiten, die den jeweiligen Eckpunkten gegenüber liegen. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte M_A, M_B und M_C sowie die Summe der Vektoren $\overrightarrow{AM_A}$, $\overrightarrow{BM_B}$ und $\overrightarrow{CM_C}$.
Lösung:

$$\overrightarrow{OM_A} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OM_B} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OM_C} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

   a) A=(0;0), B=(3;1), C=(1;3) **Lösung:**
   $M_A = (2;2)$, $M_B = (0{,}5;1{,}5)$, $M_C = (1{,}5;0{,}5)$, $\overrightarrow{AM_A} + \overrightarrow{BM_B} + \overrightarrow{CM_C} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

   b) A=(0;0;0), B=(3;1;2), C=(1;3;4) **Lösung:**
   $M_A = (2;2;3)$, $M_B = (0{,}5;1{,}5;2)$, $M_C = (1{,}5;0{,}5;1)$, $\overrightarrow{AM_A} + \overrightarrow{BM_B} + \overrightarrow{CM_C} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

5. Gegeben sind die Punkte P=(1;3;5) und Q=(2;-1;7).

   a) Geben Sie mindestens 2 veschiedene Gleichungen für die Gerade durch P und Q an.
   Lösung: Mögliche Gleichungen wären $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\8\\-4\end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$ oder $g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

   b) Prüfen Sie, ob der Punkt R=(2;-5;9) auf der Geraden liegt. **Lösung:** R liegt nicht auf der Geraden. Setzt man den Punkt in eine der Geradengleichungen ein, zum Beispiel in g_1, so ergibt sich für den Parameter r in der ersten Zeile $r = 1$ und in Zeile 2 und 3 $r = 2$.

6. Gegeben sind die Punkte A=(7;5;4), B=(-5;8;7) und C=(-1;1;3).

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

Lösung:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$|\vec{AB}| = \sqrt{162}$, $|\vec{AC}| = \sqrt{81} = 9$, $|\vec{BC}| = \sqrt{81} = 9 \quad \Rightarrow$ die Vektoren $\vec{AC}$ und $\vec{BC}$ sind gleichlang.
$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = -8 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 1 \cdot 4 = 0 \ \Rightarrow$ rechter Winkel bei C.

b) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks. **Lösung:** $\frac{1}{2}|\vec{AC}| \cdot |\vec{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 = 40{,}5$ FE.

7. Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.
$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R},\ h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$
Lösung: Die Geraden sind zueinander parallel, aber nicht identisch.

8. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h.
$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R},\ h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$ **Lösung:** S=(3;1;5)

9. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Vektorprodukte $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ und $\vec{b} \times \vec{c}$.
Lösung: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 7 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$
$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ -1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 - 7 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix}$

b) Bestimmen Sie jeweils den Flächeninhalt der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a}$ und $\vec{c}$ beziehungsweise $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramme. **Lösung:**
Dazu muss lediglich der Betrag des zugehörigen Vektorproduktes berechnet werden.
$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{9 + 9 + 81} = \sqrt{99} \approx 10$, $|\vec{a} \times \vec{c}| = \sqrt{64 + 49 + 36} = \sqrt{149} \approx 12{,}2$
$\left|\vec{b} \times \vec{c}\right| = \sqrt{961 + 1 + 144} \approx 33{,}3$

c) Bestimmen Sie den Winkel, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen. Benutzen Sie dazu das Skalarprodukt. Überprüfen Sie anschließend mit Hilfe des Vektorprodukts Ihr Ergebnis.
Lösung: Mit Hilfe des Skalarprodukts:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{15}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}} = \frac{5}{6} \ \Rightarrow \alpha = 33{,}6^\circ$$

Kontrolle mit Hilfe des Vektorprodukts:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}} \ \Rightarrow \alpha = 33{,}6^\circ$$

Berechnen Sie analog den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$, sowie zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
Lösung: Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{33}} \Rightarrow \beta = 60{,}2°$$

$$\sin\beta = \frac{|\vec{a}\times\vec{c}|}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{\sqrt{149}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{33}} \Rightarrow \beta = 60{,}2°$$

Winkel zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{26}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{33}} \Rightarrow \gamma = 52°$$

$$\sin\gamma = \frac{\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{\sqrt{1106}}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{33}} \Rightarrow \gamma = 52°$$

Zu den Aufgaben für Geübte: 7.7

11.3. Für Geübte

Die geradlinigen Flugbahnen zweier Flugzeuge F_1 und F_2 können mithilfe eines Koordinatensystems angegeben werden. Die Flugbahn von F_1 ist durch die Punkte P=(2;3;1) und Q=(0;0;1,05) und die Flugbahn F_2 ist durch R=(-2;3;0,05) und T=(2;-3;0,07) festgelegt. Die Koordinaten geben die Entfernungen zum Koordinatenursprung in Kilometern an. Es ist windstill. F_1 fliegt mit der Geschwindigkeit 350 km;h und F_2 mit der Geschwindigkeit 250 km;h relativ zu Luft. F_1 befindet sich am Punkt P und F_2 befindet sich zeitgleich am Punkt R. Betrachten wir die Situation 20 Minuten später.

Lösung: Die Flugbahnen können durch die Geraden $f_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3\\0{,}05\end{pmatrix}$, $r\in\mathbb{R}$ und $f_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\3\\0{,}05\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\0{,}02\end{pmatrix}$, $s\in\mathbb{R}$ beschrieben werden.

1. Wo befinden sich die beiden Flugzeuge? In welcher Höhe befinden sie sich?
   Lösung: F_1 fliegt in 20 Minuten $\frac{350}{3}$km und F_2 $\frac{250}{3}$km weit.
   Die Längen der Richtungsvektoren sind $\left|\begin{pmatrix}-2\\-3\\0{,}05\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+9+0{,}0025} \approx 3{,}6$ bei der Flugbahn von F_1 und $\left|\begin{pmatrix}4\\-6\\0{,}02\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+36+0{,}0004} \approx 7{,}2$ bei der Flugbahn von F_2.
   Damit sind die Parameterwerte $r = \frac{350}{3} : 3{,}6 = 32{,}4$ und $s = \frac{250}{3} : 7{,}2 = 11{,}6$. Die Koordinaten von F_1 sind daher (-62,8;-94,2;2,62) und von F_2 (44,4;-66,6;0,282). F_1 befindet sich in einer Höhe von ca. 2620 m und F_2 ist in einer Höhe von ca. 282 m.

2. Wie weit sind die Flugzeuge voneinander entfernt?
   Lösung: Sie sind ungefähr 110,7 km voneinander entfernt.

Hier geht´s weiter: *Mathematik macht Freu(n)de*